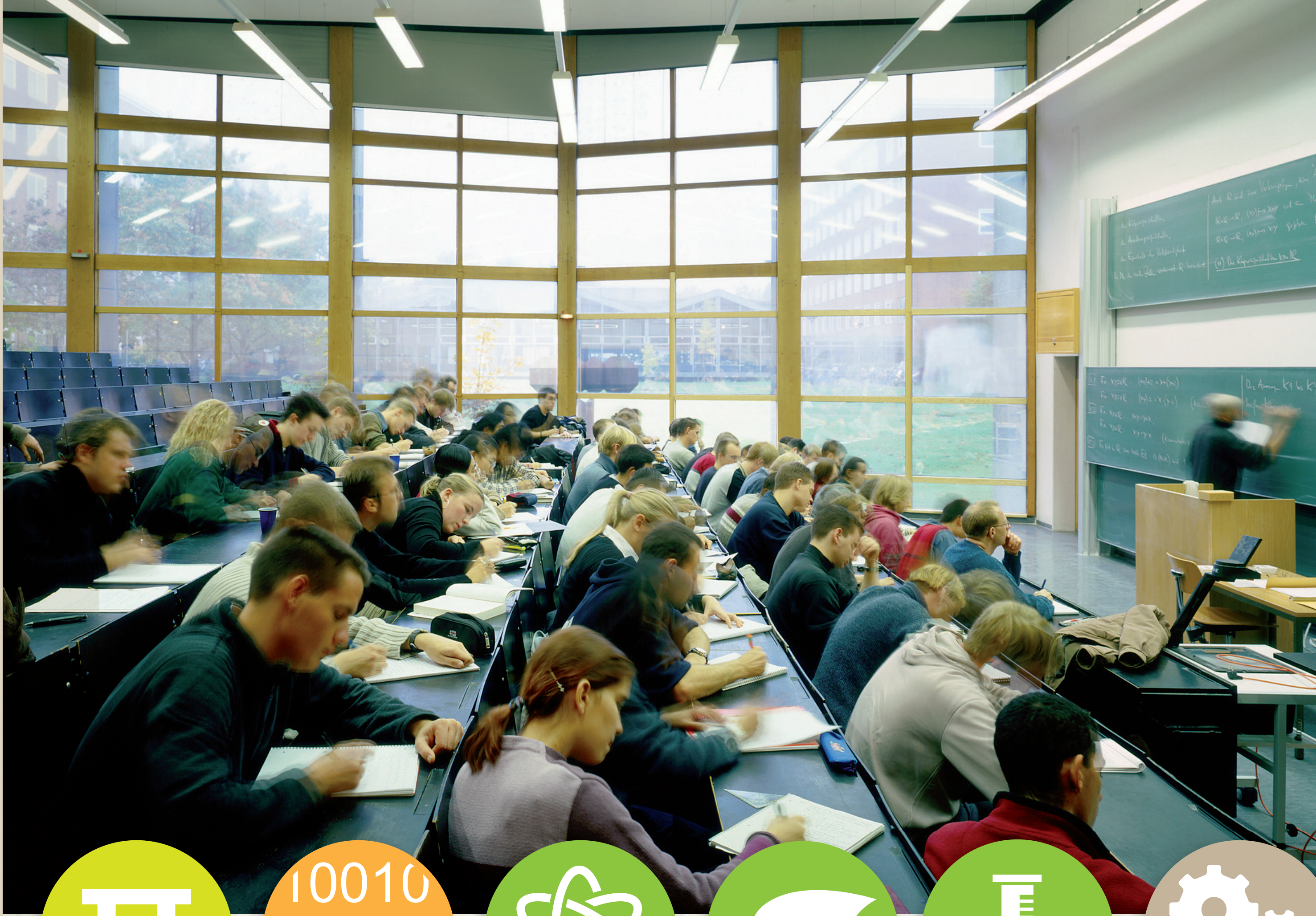


Mathematische Lernvoraussetzungen für ein MINT-Studium

Aufgabenkatalog

Ergebnisse eines Kooperationsprozesses zwischen Schulen und Hochschulen des Landes Schleswig-Holstein

SH Schleswig-Holstein
Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur

IQ.SH
Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein

IPN
Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik

Impressum

Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur
Brunswiker Straße 16-22
24105 Kiel

Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein
Schreberweg 5
24119 Kronshagen

IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik
Olshausenstraße 62
24118 Kiel

(1. Auflage Juni 2022)
Kontakt: malemint@leibniz-ipn.de

Abbildungen

Titelbild: Kröger/Dorfmüller © Uni Kiel
Alle Abbildungen wurden, sofern nicht anders angegeben, mit TikZ erstellt.

Einleitung

Der vorliegende Aufgabenkatalog ist das Ergebnis eines Kooperationsprozesses zwischen Vertreterinnen und Vertretern aus Schulen und Hochschulen Schleswig-Holsteins. In einem zweijährigen Prozess haben sich Hochschullehrende aus MINT-Studiengängen von Hochschulen in Schleswig-Holstein und Mathematiklehrkräfte von allgemeinbildenden und beruflichen Gymnasien sowie von Gemeinschaftsschulen ausgetauscht und dazu abgestimmt, welche mathematischen Lernvoraussetzungen einerseits für den Beginn eines MINT-Studiums in Schleswig-Holstein erwartet werden und andererseits im Rahmen des Mathematikunterrichts erworben werden können. Der Kooperationsprozess wurde vom Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Kultur, dem Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein (IQSH) sowie dem IPN – Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik organisiert und finanziell unterstützt.

Ausgangspunkt der gemeinsamen Arbeit war ein Katalog an mathematischen Lernvoraussetzungen, der in der bundesweiten Befragung von Hochschullehrenden für MINT-Studiengänge entstanden ist (Studie MaLeMINT[1] – Mathematische Lernvoraussetzungen für ein MINT-Studium). In der gemeinsamen Arbeit von Schulen und Hochschulen wurden diese Lernvoraussetzungen auf ihre Passung für Schleswig-Holstein überprüft und durch konkrete Aufgabenbeispiele illustriert. Das Ergebnis ist der vorliegende Katalog bestehend aus Lernvoraussetzungen, Aufgaben und Aufgabenlösungen. Dieser Katalog soll dazu dienen, Studienanfängerinnen und Studienanfänger auf die mathematischen Herausforderungen beim Übergang von der Schule in ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorzubereiten und sie dabei zu unterstützen. Dabei sind folgende Aspekte hervorzuheben:

- Schülerinnen und Schüler, die sich für ein MINT-Studium interessieren, erhalten durch den Katalog eine Orientierung, welche mathematischen Lernvoraussetzungen sie für ein Studium in Schleswig-Holstein mitbringen sollen. Die Aufgaben können dabei als Selbsttest oder zur Auffrischung verwendet werden, um sich auf das Studium vorzubereiten. Möglicherweise vorhandene Wissenslücken können so noch vor Studienbeginn gezielt geschlossen werden.

- Mathematiklehrkräften an Schulen dient der Katalog zur Information, welche mathematischen Lernvoraussetzungen Hochschulen in Schleswig-Holstein für ein MINT-Studium konkret erwarten. Alle Aufgaben in dem Katalog sind durch die Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) abgedeckt.[2] Lehrkräfte können interessierte Schülerinnen und Schüler direkt auf den Aufgabenkatalog hinweisen und diese so bei der Studienvorbereitung unterstützen. Auch kann der Katalog als Inspiration für die Gestaltung des Mathematikunterrichts genutzt werden.

- Lehrenden in MINT-Studiengängen an Hochschulen in Schleswig-Holstein dient der Katalog einerseits als Orientierung, welche mathematischen Lernvoraussetzungen sie von Stu-

[1] Zu finden unter `https://www.ipn.uni-kiel.de/malemint`

[2] Hierbei gibt es wenige Ausnahmen für Berufliche Gymnasien, bei denen die folgenden Lernvoraussetzungen nicht durch die Fachanforderungen bzw. Lehrpläne abgedeckt sind: 1.36 Logarithmusfunktion, 1.37 Polarkoordinaten, 2.1 Propädeutisch mit Folgen umgehen, 2.24 Substitutionsregel, 2.25 Partielle Integration, 3.11 Analytische Beschreibung bzw. Darstellung von Kreis und Kugel in Ebene und Raum, 4.1 Abzählende Kombinatorik. Schülerinnen und Schülern von Beruflichen Gymnasien wird empfohlen, sich vor Studienbeginn zu informieren, ob Kenntnisse über diese Lernvoraussetzungen für ihren gewünschten Studiengang vorausgesetzt werden.

dienanfängerinnen und Studienanfängern erwarten können. Andererseits wird im Katalog auch deutlich, welche Lernvoraussetzungen nicht unbedingt im Mathematikunterricht behandelt worden sind und somit an der Hochschule noch erworben werden müssen. Hochschulen können auf den Aufgabenkatalog auch im Rahmen der Studienberatung hinweisen und so Studieninteressierten die Möglichkeit bieten, sich mithilfe des Aufgabenkataloges und anderer Unterstützungsmaßnahmen gezielt auf das Studium vorzubereiten. Dabei können je nach MINT-Fach bzw. Hochschule auch Anpassungen für einzelne Studiengänge vorgenommen werden.

Im Rahmen der Begleitforschung „MaLeMINT-Implementation“ wurde im Wintersemester 2019/2020 ein Großteil der Aufgaben mit Hilfe von Studienanfängerinnen und Studienanfängern in MINT-Studiengängen der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel evaluiert. Es zeigten sich dabei deutliche Zusammenhänge zwischen dem durch die Aufgaben abgedeckten Wissen und Können und dem Studienerfolg in mathematischen Lehrveranstaltungen des ersten Semesters.

Der Aufgabenkatalog ist das Ergebnis eines Gemeinschaftsprojekts von Mathematiklehrkräften und Hochschullehrenden, unterstützt von Vertreterinnen und Vertretern des Ministeriums für Bildung, Wissenschaft und Kultur, des IQSH, des SHIBB[3] und des IPN. Damit haben sich alle für den Übergang Schule-Hochschule relevanten Institutionen in Schleswig-Holstein gemeinsam auf den Weg gemacht, um Studienanfängerinnen und Studienanfänger zu Beginn eines neuen Lebensabschnitts zu unterstützen. Die Beteiligten hoffen, dass der Aufgabenkatalog Studieninteressierten eine gute und zielgerichtete Vorbereitung auf den Einstieg in ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein ermöglicht, damit sie sich in ihrem ersten Semester von der Faszination des gewählten MINT-Faches begeistern lassen können.

[3] Das SHIBB (Schleswig-Holsteinisches Institut für Berufliche Bildung) wurde erst nach Start des Projektes als eigenes Institut gegründet. Die zugehörigen Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter, die das Projekt unterstützt haben, waren zu Beginn des Projektes noch dem IQSH zugeordnet.

Hinweise zur Struktur und Nutzung des Aufgabenkatalogs

Hier finden Sie im Überblick einige Hinweise zum Aufbau und zur Nutzung des Aufgabenkatalogs.

- Der Aufgabenkatalog ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil sind zu jeder mathematischen Lernvoraussetzung eine oder mehrere Aufgaben formuliert worden. Zu diesen Aufgaben finden sich im zweiten Teil zugehörige Lösungsvorschläge. Die Überschriften zu den Aufgaben und Lösungen geben jeweils an, welche Lernvoraussetzung mit der Aufgabe illustriert wird.
- Sofern nicht anders angegeben, sollen die Aufgaben ohne Taschenrechner oder Computer gelöst werden.
- Alle Aufgaben stellen Beispielaufgaben zu den jeweiligen Lernvoraussetzungen dar. Zusammen mit den Lösungen illustrieren die Aufgaben, was unter der Lernvoraussetzung zu verstehen ist und welcher Erwartungshorizont angelegt wird. Selbstverständlich kann man auch andere Aufgaben zu jeder Lernvoraussetzung entwickeln.
- Es gibt einige Lernvoraussetzungen, die mit dem Zusatz „Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet“ versehen sind und über grundlegendes Wissen bzw. Routineanwendungen hinausgehen. Dieses erhöhte Anforderungsniveau wird durch die dargestellten Aufgaben abgedeckt.
- Einige Lernvoraussetzungen, welche in der MaLeMINT-Studie von Hochschullehrenden erwartet wurden, sind nicht durch die Fachanforderungen Schleswig-Holsteins abgedeckt, weil die Fachanforderungen auf den von der Kultusministerkonferenz beschlossenen „Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife im Fach Mathematik“ basieren, die Grundlage für die Lehrpläne der Länder und das länderübergreifende Abitur sind. Diese Lernvoraussetzungen sind im Aufgabenkatalog zur Information für Hochschullehrende enthalten und in grüner Schrift dargestellt. Sie sind nicht durch Aufgaben konkretisiert. Sofern diese Lernvoraussetzungen in einzelnen MINT-Studiengängen vorausgesetzt werden, werden sie an den Hochschulen in Vorkursen behandelt. Selbstverständlich ist es nicht von Nachteil, wenn Studieninteressierte Kenntnisse zu diesen Lernvoraussetzungen mit in das Studium bringen.
- Einige Aufgaben und Informationen wurden aus anderen Quellen übernommen, die jeweils angegeben sind. An dieser Stelle sei darauf verwiesen, dass mit dem *cosh-Mindestanforderungskatalog*[4] aus Baden-Württemberg und dem *Basispapier Mathematik*[5] aus Niedersachsen auch für zwei andere Bundesländer Aufgabenkataloge vorliegen, an denen Schulen und Hochschulen gemeinsam gearbeitet haben.
- Bei der Formulierung aller Aufgaben und Lösungen musste eine Abwägung zwischen formaler Strenge der Hochschulmathematik und Konventionen der Schulmathematik getroffen

[4] `http://cosh-mathe.de/materialien/` Alle Aufgaben, die aus dem cosh-Katalog entnommen wurden, beziehen sich auf die Version cosh 2.0, welche 2014 veröffentlicht wurde.

[5] `https://www.mint-in-niedersachsen.de/assets/MINT/Dokumente/IGeMa_Basispapier_Mathematik_MK_MWK_190401.pdf`

werden. Da der Aufgabenkatalog sich auch an Studieninteressierte richtet, die mit der formalen Strenge der Hochschulmathematik noch nicht vertraut sind, wurden an einigen Stellen Formalitäten zugunsten der besseren Verständlichkeit für Studieninteressierte ausgespart und die Aufgaben entsprechend der Konventionen der Schulmathematik formuliert.

- Der vorliegende Aufgabenkatalog bezieht sich auf zwei zentrale Bereiche von erwarteten Lernvoraussetzungen und zwar auf die Bereiche *Mathematische Inhalte* und *Mathematische Arbeitstätigkeiten*. In der MaLeMINT-Studie wurden noch zwei weitere Bereiche von Lernvoraussetzungen identifiziert[6], die zum einen *Persönliche Merkmale* (z. B. Durchhaltevermögen, Konzentrationsfähigkeit) und zum anderen *Vorstellungen über das Wesen der Mathematik* (z. B. Beweisen ist eine zentrale Tätigkeit der Mathematik) umfassen. Diese beiden Bereiche werden im Aufgabenkatalog nicht thematisiert, sind aber sicherlich auch vorteilhaft für einen erfolgreichen Einstieg in ein MINT-Studium.

- Es sei angemerkt, dass sich die mathematischen Anforderungen der verschiedenen MINT-Studiengänge in Schleswig-Holstein unterscheiden können und bei einigen Studiengängen ggf. geringer ausfallen. Auch wenn für diese Studiengänge nicht alle im Aufgabenkatalog abgebildeten Lernvoraussetzungen für den Studieneinstieg notwendig sind, so ist ein „mehr“ an mathematischem Wissen und Können immer von Vorteil. Aktuelle Informationen dazu gibt es bei den Studienberatungen für die MINT-Studiengänge an den jeweiligen Hochschulen.

Schließlich noch ein wichtiger Hinweis an Studieninteressierte: Bitte lassen Sie sich durch den umfangreichen Aufgabenkatalog *nicht* abschrecken. Die dargestellten mathematischen Inhalte und Arbeitstätigkeiten haben Sie so oder so ähnlich bereits in der Schule kennengelernt. Sehen Sie sich die Aufgaben genau an und frischen Sie Ihr Wissen wieder auf. Je mehr der Aufgaben und ihrer Lösungen Sie verstanden haben, umso besser sind Sie auf das gewählte MINT-Studium vorbereitet. Falls Sie aufgrund des Katalogs zweifeln, ob ein MINT-Studium die richtige Entscheidung für Sie ist, fragen Sie Ihre Lehrkräfte und nutzen Sie gerne die Angebote der zuständigen Studienberatung an den Hochschulen.

[6] s. MaLeMINT-Broschüre auf `https://www.ipn.uni-kiel.de/malemint`

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Aufgaben

1. Mathematische Inhalte: Grundlagen

Mengen und Zahlen

1.1. Mengen, Mengendarstellungen und Mengenoperationen

a) Welche Elemente bzw. Zahlen werden durch x dargestellt? Formulieren Sie in Worten.

(i) $x \in \{a;\ b;\ c;\ d\} \cap \{b;\ d;\ e;\ f\}$

(ii) $x \in [0;\ 1{,}5]$

(iii) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;\ 2\}$

(iv) $x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1]$

b) Markieren Sie auf der Zahlengeraden die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x > 5\}$$

(d. h. Menge der reellen Zahlen x, für die gilt $x > 5$) sowie

$$B = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 7\}$$

(d. h. Menge der reellen Zahlen x, für die gilt $x \leq 7$).
Markieren Sie weiter $A \cap B$ und $A \cup B$.

c) Notieren Sie in Mengenschreibweise:

(i) Die reelle Zahl s ist größer oder gleich 5 und kleiner oder gleich 7.

(ii) Die Zahl 5 gehört nicht zu den einstelligen geraden Zahlen.

(iii) Die Definitionsmenge $\mathbb{D}_g$ der Funktion g besteht aus allen reellen Zahlen, die größer als 1 sind.

(iv) Die reelle Funktion f hat 2 als einzige Definitionslücke.

1.2. Rationale, reelle Zahlen (inkl. elementarer Eigenschaften)

a) Nennen Sie fünf Zahlen zwischen 1 und 1,3.

b) Nennen Sie fünf Zahlen zwischen $\frac{5}{8}$ und $\frac{11}{13}$.

c) Nennen Sie fünf reelle Zahlen, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen.

d) Kreuzen Sie alle Zahlenmengen an, zu denen die folgenden Zahlen gehören.

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
2				
$\frac{3}{4}$				
$\sqrt{5}$				
-7				
0				
$\pi + 1$				

1.3. Größenvorstellungen zu Standardbeispielen reeller Zahlen

Im Folgenden sind Näherungswerte verschiedener reeller Zahlen angegeben.
Ordnen Sie die Zahlen der linken Spalte ihrem auf die zweite Nachkommastelle gerundeten Wert in der rechten Spalte zu.

e	□	□	3,87
2π	□	□	2,72
$\sin(90°)$	□	□	0,00
$\frac{1}{3}$	□	□	6,28
$\ln(1)$	□	□	1,00
$\sqrt{15}$	□	□	0,33

1.4. Zahlengerade als Repräsentationsform für Zahlen

a) Markieren Sie die folgenden Zahlen auf der Zahlengeraden:

$$e; \quad \pi; \quad 2\pi; \quad \sqrt{17}; \quad 0; \quad 2; \quad -\frac{3}{4}; \quad -\frac{3}{8}; \quad -2{,}1; \quad \frac{4}{3}.$$

b) Betrachten Sie die Menge $\{2; 4\}$ und das reelle Intervall $[2; 4]$. Kreuzen Sie an, wozu die folgenden Zahlen gehören:

	$\{2; 4\}$	$[2; 4]$
1	□	□
2	□	□
2,1	□	□
3	□	□

1.5. Technik für Zahlenvergleiche

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Begründen Sie
$$900 \leq 31^2 \leq 1600.$$

b) Entscheiden und begründen Sie, welche Zahl größer ist:

(i) $\frac{8}{15}$ oder $\frac{5}{9}$,

(ii) $\frac{5}{16}$ oder $\frac{4}{15}$.

c) (i) Begründen Sie, dass $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9 liegt.

(ii) Untersuchen Sie, zwischen welchen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen $\sqrt{150}$ liegt.

Quelle: cosh (20)

1.6. Teilbarkeit einschließlich ggT, kgV und Primfaktorzerlegung

a) Entscheiden Sie, ob 6006 jeweils durch 2; 3; 5 oder 9 teilbar ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

b) Addieren Sie $\frac{3}{8}$ und $\frac{7}{12}$.

c) Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) der Zahlen 117 und 143.

d) Kürzen Sie den Bruch $\frac{117}{143}$.

1.7. Rechnen mit Maßeinheiten

a) Berechnen Sie:

(i) $6{,}7\,\mathrm{t} - 34\,\mathrm{kg} - 12\,000\,\mathrm{g}$

(ii) $24\,\mathrm{m} \cdot 7\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{dm} \cdot 6\,\mathrm{cm}$

(iii) $6000\,\mathrm{cm}^3 + 5\,\ell$

b) Rechnen Sie $30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ um.

1.8. Komplexe Zahlen (inkl. elementarer Eigenschaften)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

Variablen und Terme

1.9. Elementare algebraische Regeln

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Klammern Sie so weit wie möglich aus:

(i) $a - 3a^2b - 4a^5$

(ii) $\mathrm{e}^x x^2 - 3x \cdot \mathrm{e}^x$

Quelle: cosh (22), (23), (30)

b) Vereinfachen Sie so weit wie möglich:

(i) $3(x+3)^2 - 2x(x-1) - (x-4)^2$

(ii) $-\left(-\left(b+c-\left(5-(+3)\right)\right)\right)$

(iii) $\dfrac{4 \cdot a \cdot b + 6 \cdot a}{2 \cdot (b+1) + 1}$

(iv) $3ab - \left(b\,(a-2) + 4b\right)$

(v) $\left(\dfrac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3}\right)^3 : \left(\dfrac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4$

Quelle: cosh (22), (23), (30)

1.10. Bruchrechnung und Umgang mit Bruchtermen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Fassen Sie den Ausdruck

$$\frac{1}{x+1} + x - 1$$

zu einem Bruch zusammen.

Quelle: cosh (29)

b) Berechnen Sie ohne Taschenrechner

$$\frac{\frac{3 \cdot 4}{7}}{\frac{16}{21}}.$$

1.11. Prozentrechnung, Proportionalität und Dreisatz

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Ein Kreissektor füllt 30 % der Fläche eines Kreises aus. Berechnen Sie den Mittelpunktswinkel.

Quelle: cosh (33)

b) Angenommen, eineinhalb Hühner legen in eineinhalb Tagen genau eineinhalb Eier. Ermitteln Sie, wie viele Eier dann sieben Hühner in sechs Tagen legen.

Quelle: 55. Mathematik-Olympiade, Aufgabe 550711

c) Ein Mol Wasserstoffgas (H_2) wiegt 2 g, ein Mol Sauerstoffgas (O_2) wiegt 32 g und ein Mol Wasser (H_2O) wiegt 18 g.
Berechnen Sie, wie viel g Wasserstoffgas und wie viel g Sauerstoffgas benötigt werden, um daraus 20 g Wasser herzustellen.

d) Es werden 200 mℓ einer Lösung mit 1 % Wirkstoffanteil mit 300 mℓ einer Lösung mit 2 % Wirkstoffanteil vermischt.
Berechnen Sie den Wirkstoffanteil dieser Mischung.

e) Kreuzen Sie an: Eine reelle Funktion f ist genau dann proportional, wenn...

	wahr	falsch
... $\frac{x}{f(x)} = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt.	☐	☐
... $f(x) = m \cdot x + b$ mit $m,\, b > 0$ gilt.	☐	☐
... der Graph von f eine Ursprungsgerade ist.	☐	☐
... der Graph von f die Winkelhalbierende des I. Quadranten ist.	☐	☐

(Un-)Gleichungen in einer Variablen und lineare Gleichungssysteme

1.12. Äquivalenzumformung und Implikation

Begründen Sie, zwischen welchen Zeilen keine Äquivalenzumformung vorliegt:

$$\begin{aligned} 3(x+2)^2 &= 27 \\ (x+2)^2 &= 9 \\ (x+2) &= \sqrt{9} \\ x+2 &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

1.13. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Betrachten Sie die Gleichung

$$(x+2)^2 = a.$$

Begründen Sie, für welche Werte von a diese Gleichung keine/eine/zwei reelle Lösungen hat und bestimmen Sie ggf. die Lösung(en).

1.14. Lineare und quadratische Gleichungen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der quadratischen Gleichungen:

(i) $0 = x^2 + 2x + 1$

(ii) $0 = x^2 - 5x + 6$

(iii) $0 = x^2 - 4x + 5$

b) Entscheiden Sie, für welche a die quadratische Gleichung eine reelle Lösung hat und begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$0 = x^2 + 4x + 2a$$

c) Gegeben sind zwei Elektro-Roller Sharing-Tarife.

Tarif A: 10 € monatliche Grundgebühr und 9 ct pro Fahrminute

Tarif B: keine Grundgebühr und 19 ct pro Fahrminute

Entscheiden Sie, ab welcher monatlichen Anzahl an Fahrminuten Tarif A günstiger ist und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1.15. Potenz- und Wurzelgleichungen (inkl. Rechenregeln)

a) Berechnen Sie:
   (i) $3^{18} : 3^{16}$
   (ii) $2^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$
   (iii) $\sqrt[4]{81}$
   (iv) 2^{3^2}

b) Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x auf:
   (i) $x^{-2} = 3$ mit $x \neq 0$
   (ii) $\sqrt{\sqrt{16}} = 2x$
   (iii) $(\sqrt{3x} + \sqrt{27x})^2 = 24$ mit $x > 0$
   (iv) $\sqrt[3]{x} = 2$ mit $x \geq 0$
   (v) $2^x = 1024$
   (vi) $x^3 = 27$
   (vii) $x^2 = 4$

c) Geben Sie an, für welche natürlichen Zahlen n die Ungleichung

$$2^{-n} < 0{,}01$$

gilt.

d) Vereinfachen Sie so weit wie möglich $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3n}$.

1.16. Betragsgleichungen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge:

a) $|x - 3| = 2$

b) $|2x - 3| = 5$

1.17. Exponential- und Logarithmusgleichungen

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

a) $(x^2 - 4)\mathrm{e}^{0,5x} = 0$

b) $\ln(2x - 3) = 0$

c) $\mathrm{e}^x = 2$

1.18. Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichung

$$\cos(2x) = 1 \text{ mit } x \in [0; 2\pi].$$

b) Begründen Sie mit Hilfe des Einheitskreises, dass für jeden Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

c) i) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ der Funktion

$$f(x) = 1 + \tan^2(x).$$

ii) Zeigen Sie, dass für alle x-Werte des Definitionsbereiches gilt

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

1.19. Lineare und quadratische Ungleichungen

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $3x - 7 > 2 + 5x$?

Quelle: cosh (43)

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^2 - 2x < 3$?

(Tipp: Ersetzen Sie zunächst „$<$ “durch „$=$ “!)

Quelle: cosh (44)

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $x^2 < 4$?

(ii) $x^2 \geq 4$?

1.20. Ungleichungen mit Beträgen

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge:

(i) $|x - 3| < 2$

(ii) $|2x - 3| > 5$

(Tipp: Stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar!)

Quelle: cosh (45)

b) Geben Sie an, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Ungleichung erfüllt ist:

$$|3x - 6| \leq x + 2.$$

(Tipp: Stellen Sie den Sachverhalt grafisch dar!)

Quelle: cosh (5)(b)

1.21. Lineare Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekannten (ohne Matrixdarstellung)

a) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Gleichungssysteme linear sind.

Gleichungssystem	linear	nicht linear
(i) I $x + \ y = 1$ II $y - \ 2 = x$		
(ii) I $x \cdot y = 5$ II $2x + 3y = 7$		
(iii) I $a^2x + 1 = 7$ II $3x - y = 5$		

b) Bestimmen Sie die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & x + y = 1 \\ \text{II} & y - 2 = x \end{array}$$

1.22. Lineare Gleichungssysteme: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (ohne Matrixdarstellung)

Prüfen Sie, ob das folgende Gleichungssystem lösbar ist:

$$\begin{array}{lr} \text{I} & x + 3y + 2z = 1 \\ \text{II} & 2x + 4y + 4z = 2 \\ \text{III} & 3x + 5y + 6z = 4 \end{array}$$

Elementare Geometrie

1.23. Geometrische Konstruktionen von Dreiecken bzw. im Dreieck

a) Konstruieren Sie ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit einer Höhe $h_c = 8\,\text{cm}$ über der Basis $\overline{AB}$ mit der Länge 12 cm.

b) Konstruieren Sie den Inkreismittelpunkt des Dreiecks aus a).

c) Konstruieren Sie alle möglichen Dreiecke mit den Seitenlängen $a = 3\,\text{cm}$ und $b = 2\,\text{cm}$, wobei der b gegenüberliegende Winkel die Größe $\beta = 30°$ habe.

1.24. Satz des Pythagoras und Sätze am Kreis (z. B. Satz des Thales)

a) Formulieren Sie ohne Verwendung von Variablen und ohne Verweis auf eine Zeichnung

(i) den Satz des Thales,

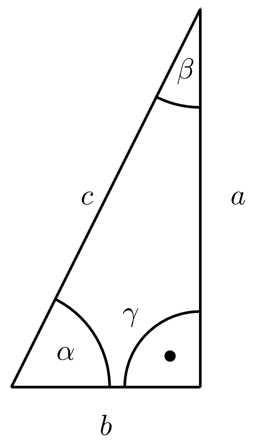
(ii) den Satz des Pythagoras.

b) Überprüfen Sie, ob das folgende Dreieck mit den gegebenen Seitenlängen rechtwinklig ist: $a = 10\,\text{cm}, b = 12\,\text{cm}, c = 15\,\text{cm}$.

1.25. Trigonometrie (inkl. Sinus- und Kosinussatz)

a) Kreuzen Sie an, welche Gleichungen richtig sind:

$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$	
$\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$	
$\tan(\beta) = \frac{a}{b}$	
$\cos(\beta) = \frac{a}{c}$	



b) Zeigen Sie, dass der Satz des Pythagoras ein Spezialfall des Kosinussatzes ist.

c) Nach dem Kongruenzsatz SSS ist ein Dreieck eindeutig bestimmt, wenn die Längen der drei Seiten a, b und c bekannt sind. Zeigen Sie mit Hilfe des Sinus- oder des Kosinussatzes, dass in diesem Fall die Größen der drei Winkel berechnet werden können.

1.26. Berechnung von Winkelgrößen, Längen und Flächeninhalten bzw. Volumina bei einfachen Flächen- bzw. Körperformen (z. B. Dreieck, Viereckstypen, Kreis, Pyramiden, Zylinder, Kugel)

a) Welche der folgenden Aussagen über Winkel sind stets korrekt?

(i) Die Summe zweier Nebenwinkel ist 180°.

(ii) Stufenwinkel sind gleich groß.

(iii) Scheitelwinkel sind gleich groß.

(iv) Wechselwinkel sind gleich groß.

Quelle: cosh (51)

b) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen eines Zylinders mit dem Durchmesser 4 cm und der Höhe 8 cm.

Quelle: cosh (52)

c) Gegeben sei eine quadratische Pyramide mit dem Volumen 60 cm^3 und der Höhe 6 cm. Berechnen Sie die Länge der Grundseite und den Inhalt der Grundfläche.

Quelle: cosh (53)

d) Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 10 cm wird um eine der Symmetrieachsen gedreht. Welches Volumen und welchen Oberflächeninhalt hat der erzeugte Rotationskörper?

Quelle: cosh (54)

e) Eine 4 m lange Leiter wird in einer Höhe von 3 m an eine Hauswand gelehnt. Welchen Winkel α schließt die Leiter mit dem Boden ein?

Quelle: cosh (57)

1.27. Kongruenz und Ähnlichkeit (und zugehörige Abbildungen)

a) Gegeben sind zwei Dreiecke mit den Innenwinkeln $\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$ und $\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2$. Es gilt

$$\alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2.$$

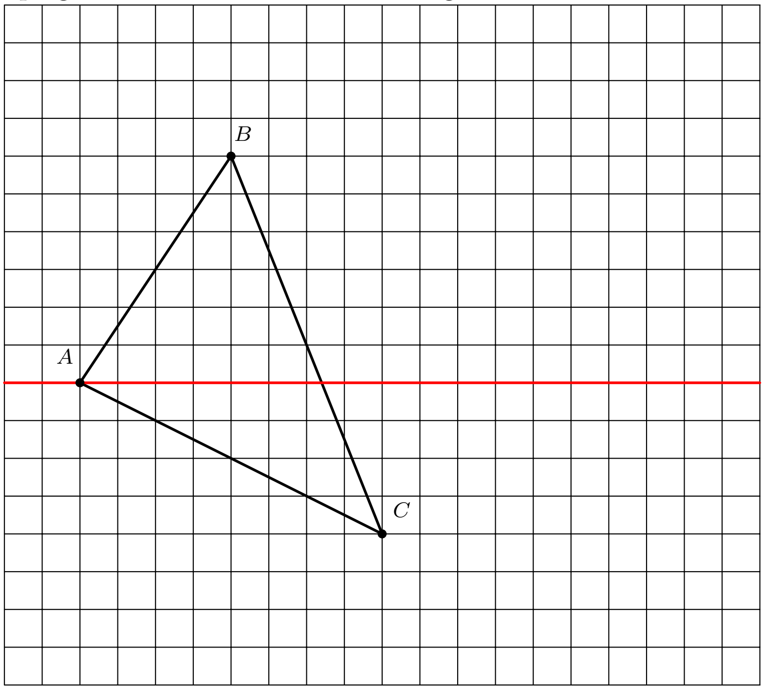
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen unter diesen Voraussetzungen immer wahr sind:

(i) Die Dreiecke sind ähnlich.

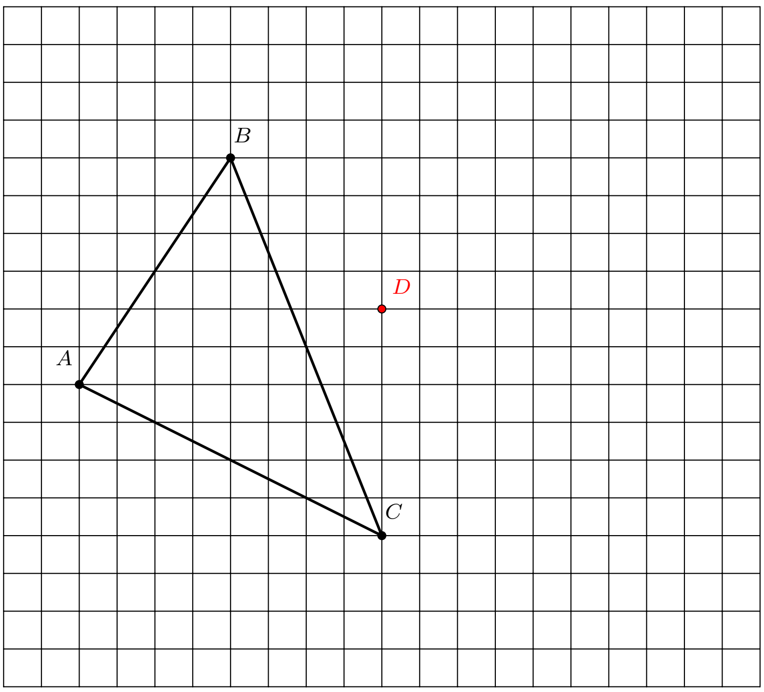
(ii) Die Dreiecke sind kongruent.

(iii) Die Dreiecke haben den gleichen Flächeninhalt.

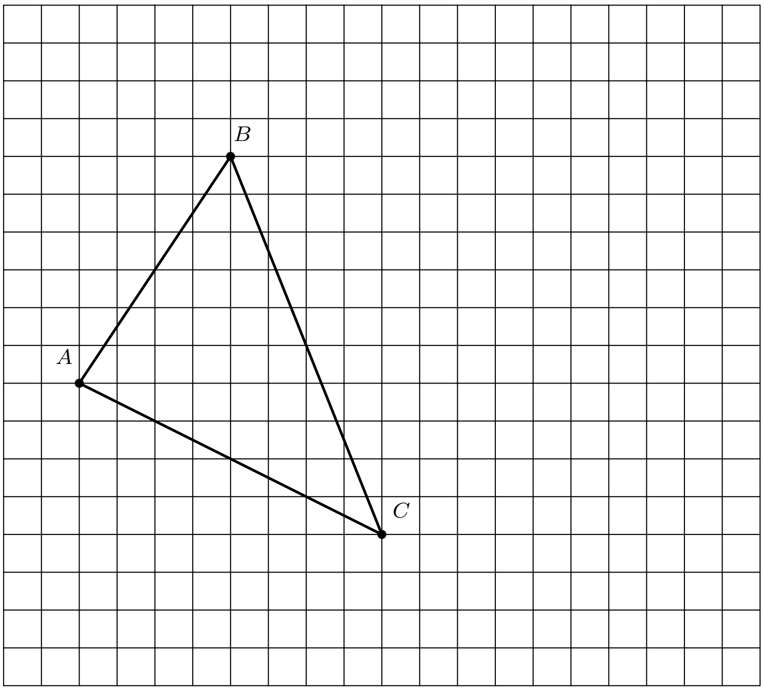
b) (i) Spiegeln Sie das Dreieck an der abgebildeten Achse.



(ii) Drehen Sie das Dreieck um den angegebenen Drehpunkt um 180°.



(iii) Stellen Sie eine Verschiebung des Dreiecks um 5 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach oben dar. Eine Einheit entspricht der Seitenlänge eines Kästchens.



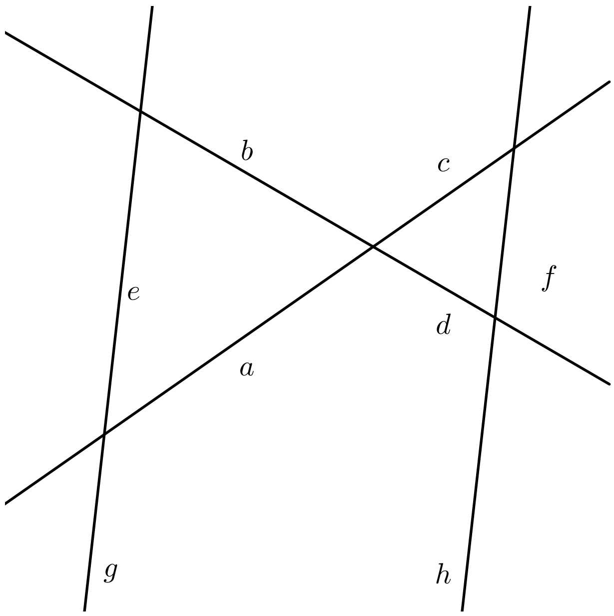
c) Formulieren Sie die vier Kongruenzsätze.

d) Aus einem Dreieck entsteht auf Basis des Ähnlichkeitsfaktors (Streckfaktor) $k = 2$ ein neues Dreieck. Vergleichen Sie die beiden Dreiecke und beschreiben Sie, in welcher Beziehung die Seitenlängen, Winkelgrößen und der Flächeninhalt des neuen Dreiecks zu denen des ursprünglichen Dreiecks stehen.

1.28. Strahlensätze

Die Geraden g und h sind parallel. Entscheiden Sie, welche Gleichungen für die Streckenlängen a, b, c, d, e richtig und welche falsch sind.

	richtig	falsch
$\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$	☐	☐
$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	☐	☐
$\frac{b}{e} = \frac{d}{f}$	☐	☐
$\frac{e}{f} = \frac{a}{c}$	☐	☐



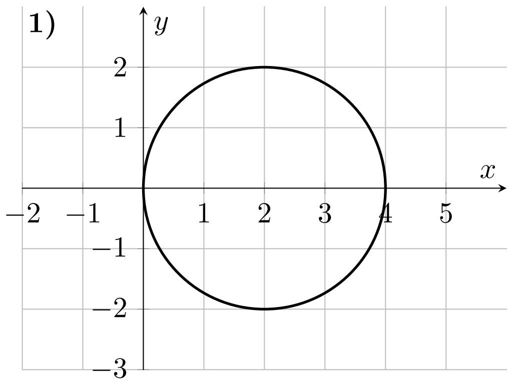
1.29. Kreisgleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

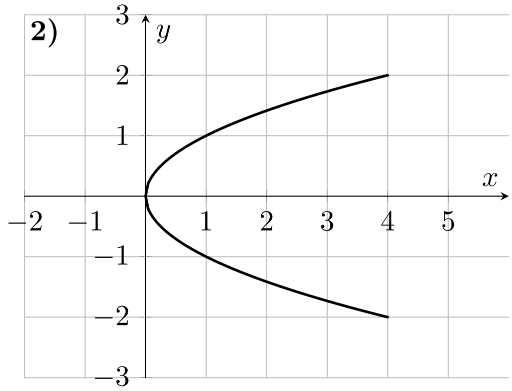
Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

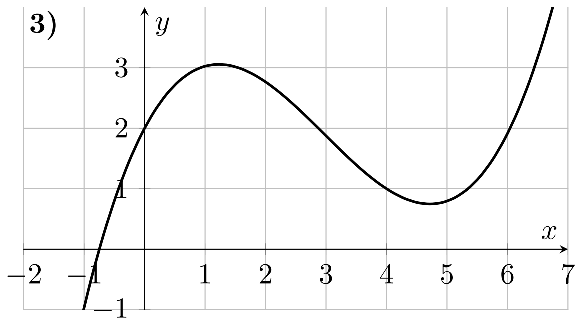
Funktionen

1.30. Begriff/Definition einer Funktion

Entscheiden Sie, welcher der folgenden Graphen eine reelle Funktion darstellt.







1.31. Definitionsmenge und Wertemenge

a) Geben Sie die Wertemenge der Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$ $(x \in \mathbb{R})$ an.

b) Nennen Sie mindestens eine reelle Zahl, die Sie in die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ nicht einsetzen dürfen.

c) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

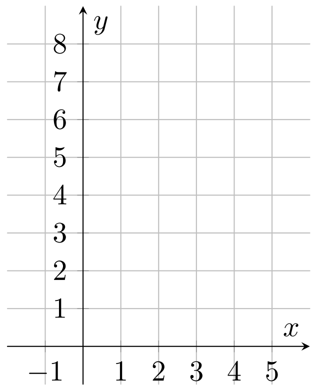
(i) Geben Sie drei reelle Zahlen für x an, für die $f(x)$ nicht definiert ist.

(ii) Geben Sie die größtmögliche Menge aller reellen Zahlen an, für die $f(x)$ so definiert werden kann (Definitionsmenge).

1.32. Repräsentation von Funktionen (Tabelle, Graph, Gleichung)

a) Gegeben sei die reelle Funktion f mit $f(x) = 2^x$. Ergänzen Sie die Wertetabelle und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen von f.

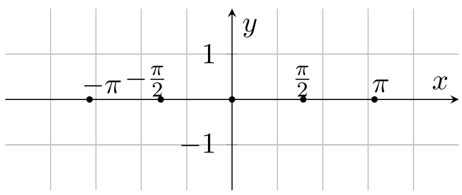
x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					



b) Gegeben sei folgende Wertetabelle einer reellen Funktion g. Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung an und skizzieren Sie den zugehörigen Graphen von g.

$g(x) =$______

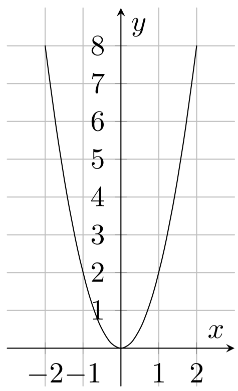
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g(x)$	0	-1	0	1	0



c) Gegeben sei der folgende Graph einer reellen Funktion h. Ergänzen Sie die Wertetabelle und geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung an.

$h(x) =$______

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$h(x)$									



1.33. Transformation von Funktionen (Spiegelung, Verschiebung, Streckung/Stauchung) an Funktionsgraph und -gleichung

a) Der Graph der reellen Funktion f mit $f(x) = x^2$ soll um 3 Längeneinheiten nach rechts und um 2 Längeneinheiten nach unten verschoben werden. Geben Sie die Funktionsgleichung des verschobenen Funktionsgraphen an.

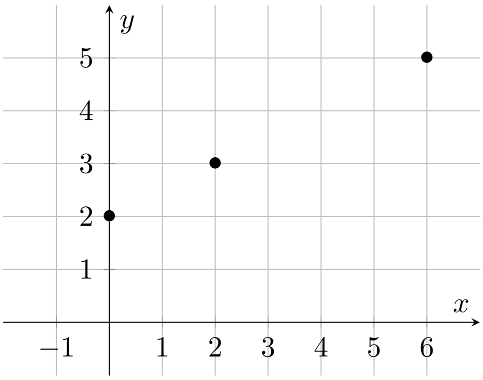
b) Gegeben sei die reelle Funktion f mit $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + 2$. Kreuzen Sie an, aus welcher Transformation der Funktion f sich die folgenden Funktionen ergeben (es kann auch eine Kombination aus mehreren Transformationen sein).

		$g_1(x) = f(x) + 3$	$g_2(x) = f(-2x)$	$g_3(x) = \frac{1}{2}f(x) - 5$	$g_4(x) = -3f(x+4)$
Stauchung	in x-Richtung				
	in y-Richtung				
Streckung	in x-Richtung				
	in y-Richtung				
Spiegelung	an x-Achse				
	an y-Achse				
Verschiebung nach	oben				
	unten				
	rechts				
	links				

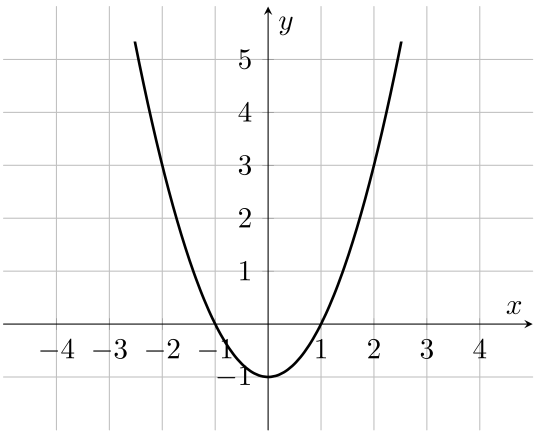
1.34. Lineare und quadratische Funktionen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Prüfen Sie, ob die Messpunkte einem linearen Zusammenhang unterliegen können. Geben Sie dazu ggf. eine Funktionsgleichung an.



b) Dargestellt ist der Graph einer quadratischen Funktion f. Geben Sie deren Funktionsgleichung an.



1.35. Potenz- und Wurzelfunktion

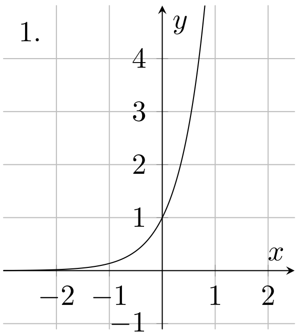
a) Gegeben sei die reelle Funktion f mit $f(x) = x^n$, wobei $n \in \mathbb{N}$ gerade ist. Begründen oder widerlegen Sie:
Der Graph zu $f(x)$ geht durch den Punkt $P(-1|1)$.

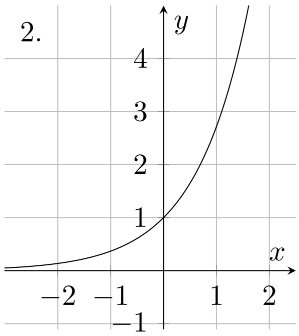
b) Gegeben sei die Funktion g mit $g(x) = \sqrt{3x-6}$. Bestimmen Sie die größtmögliche reelle Definitionsmenge, die Wertemenge sowie alle Nullstellen von g.

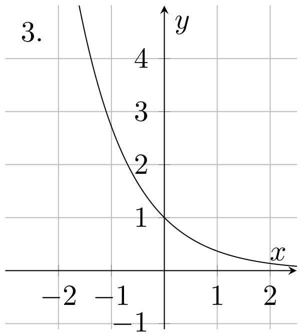
1.36. Exponential- und Logarithmusfunktionen

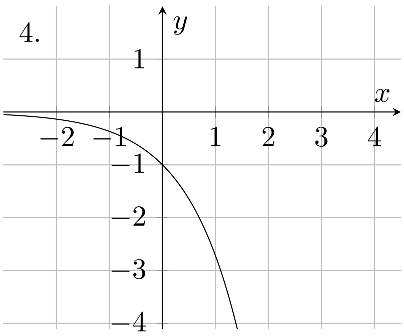
Ordnen Sie die Funktionsterme den Graphen zu.

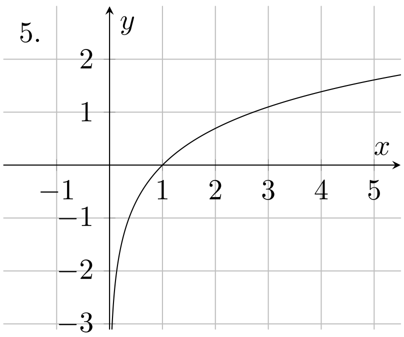
	Graph						
Funktionsterm	1	2	3	4	5	6	7
e^x							
e^{2x}							
e^{-x}							
$-e^x$							
$\ln(x)$							
$2\ln(x)$							
$\ln(x)+1$							

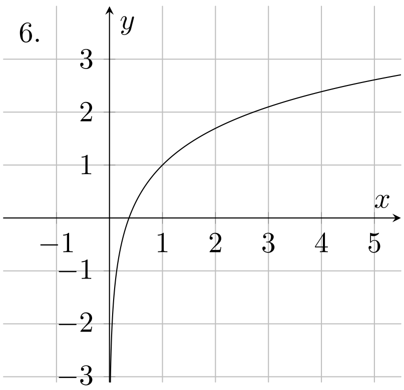


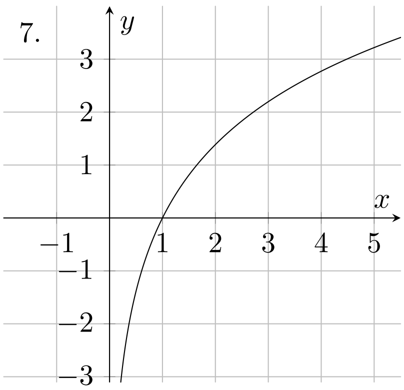










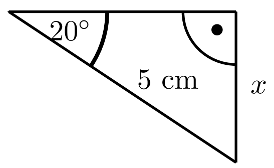


Anmerkung: Die Logarithmusfunktion ist nicht in den Fachanforderungen für Berufliche Gymnasien enthalten. Schülerinnen und Schülern von Beruflichen Gymnasien wird empfohlen, sich vor Studienbeginn zu informieren, ob Kenntnisse über die Logarithmusfunktion für ihren gewünschten Studiengang vorausgesetzt werden.

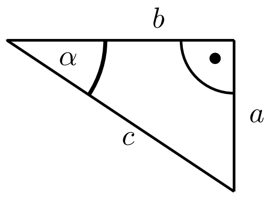
1.37. Trigonometrische Funktionen (inkl. Bogenmaß, Kenntnisse spezieller Funktionswerte, Polarkoordinaten)

a) In einer Aufgabe sollen Sie eine trigonometrische Berechnung zum abgebildeten Dreieck durchführen. Kreuzen Sie an, welche Einstellung Sie dazu an Ihrem Taschenrechner wählen müssen.

- ☐ $\boxed{\text{D}}$ bzw. $\boxed{\text{Deg}}$
- ☐ $\boxed{\text{R}}$ bzw. $\boxed{\text{Rad}}$



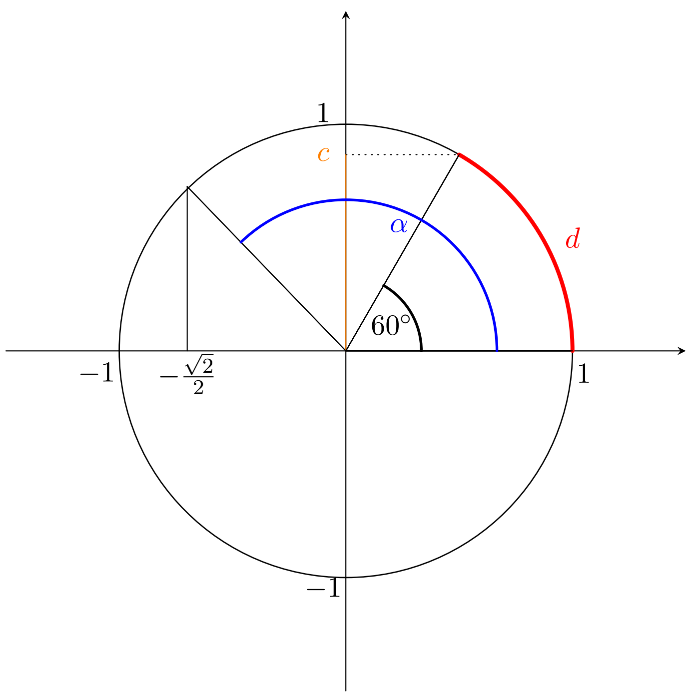
b) Betrachten Sie das folgende Dreieck:



(i) Gegeben seien a und α. Geben Sie an, wie Sie daraus b bestimmen können.

(ii) Gegeben seien a und c. Geben Sie an, wie Sie daraus α bestimmen können.

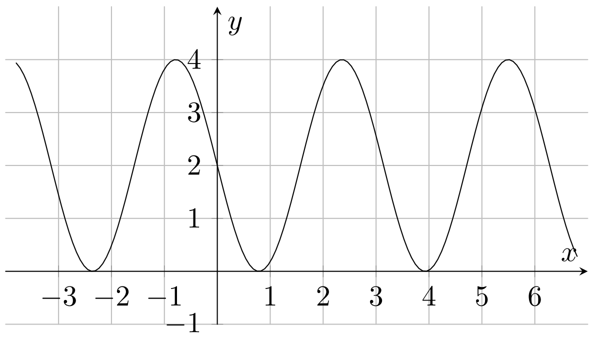
c) Geben Sie α, d und c an.



d) Ergänzen Sie die fehlenden Werte:

	sin	cos	tan
0°			
30°		$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	
45°			
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$		
90°			nicht definiert

e)



Betrachten Sie den obigen Graphen. Geben Sie dazu eine mögliche Funktionsgleichung an.

Anmerkung: Polarkoordinaten sind nicht in den Fachanforderungen für Berufliche Gymnasien enthalten. Schülerinnen und Schülern von Beruflichen Gymnasien wird empfohlen, sich vor Studienbeginn zu informieren, ob Kenntnisse über Polarkoordinaten für ihren gewünschten Studiengang vorausgesetzt werden.

1.38. Verkettung von Funktionen

Gegeben seien die reellen Funktionen f und g mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2 + 2x$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für

a) $g(f(x))$,

b) $f(g(x))$.

1.39. Symmetrie

a) Kreuzen Sie an, welche der folgenden reellen Funktionen f mit $f \neq 0$ achsensymmetrisch zur y-Achse oder punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

Funktion f mit der folgenden Eigenschaft für alle $x \in \mathbb{R}$	achsen-symmetrisch (zur y-Achse)	punkt-symmetrisch (zum Ursprung)	keine Aussage möglich
$f(x) = f(-x)$			
$f(x) = -f(-x)$			
$f(x) = a$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$			
$f(ax) = af(x)$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$			

b) Für eine reelle Funktion f gilt

$$f(x) = f(-x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Skizzieren Sie einen möglichen Funktionsgraphen.

1.40. Monotonie

Sei f eine reelle Funktion. Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Aussagen wahr sind:

a) Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist f streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$.

b) Wenn f streng monoton steigend ist, dann ist f auch monoton steigend.

c) Wenn f monoton steigend auf $\mathbb{R}$ ist, dann gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Wenn f monoton fallend ist, dann ist f auch streng monoton fallend.

e) Wenn f streng monoton steigend auf $\mathbb{R}$ ist, dann gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1.41. Nullstellen

a) Geben Sie jeweils eine Funktion an, die genau

(i) eine Nullstelle,
(ii) zwei Nullstellen,
(iii) drei Nullstellen,
(iv) keine Nullstelle,
(v) unendlich viele Nullstellen

in $\mathbb{R}$ hat.

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der reellen Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x.$$

c) Geben Sie eine ganzrationale Funktion an, die genau die drei reellen Nullstellen

$$x_1 = -3, x_2 = -1, x_3 = 2$$

hat.

d) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die reelle Funktion f mit

$$f(x) = x^2 - 2x + a$$

genau zwei Nullstellen hat.

1.42. Asymptotisches Verhalten von Funktionen

a) Gegeben sei die reelle Funktion f mit $f(x) = 5x^7 + 3x^5 + 2x^2 + 4$. Begründen Sie ohne zu rechnen oder zu zeichnen:
Der Graph von f schneidet die x-Achse mindestens einmal.

b) Beschreiben Sie das Verhalten von $f(x) = \mathrm{e}^x$ für $\begin{cases} x \to \infty \\ x \to -\infty \end{cases}$.

1.43. Polynome (Grad n), elementares Rechnen mit Polynomen

Gegeben seien die reellen Funktion f und g mit

$$f(x) = ax^4 + d \text{ mit } a, d \in \mathbb{R},$$
$$g(x) = 3x^4 + 2x^2 + 5.$$

Bestimmen Sie jeweils die Funktionsgleichung der Funktion u in der Form

$$u(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

für

a) $u(x) = f(x) + g(x)$, b) $u(x) = f(x) \cdot g(x)$, c) $u(x) = f(x) - g(x)$.

1.44. Polynomdivision

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

1.45. Gebrochen-rationale Funktion

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

1.46. Begriff der Umkehrfunktion inkl. zentraler Beispiele (Potenz-, Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktionen und trigonometrische Funktionen)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

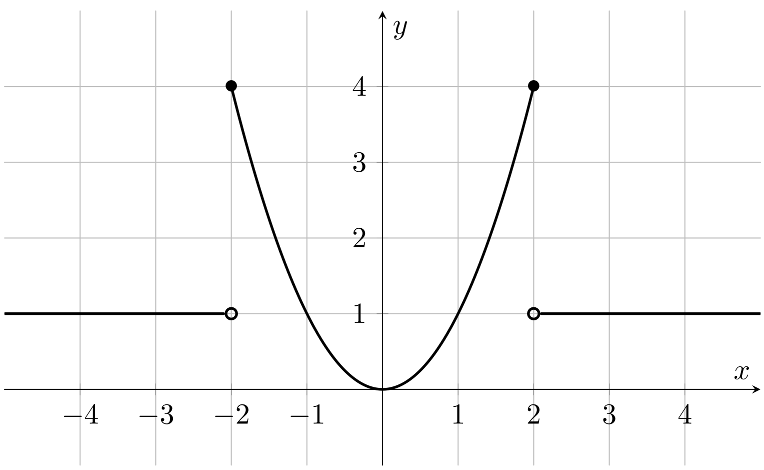
1.47. Funktionen mit Fallunterscheidung

a) Zeichnen Sie die Graphen folgender reeller Funktionen:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ 2x+1 & \text{für } x > 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Geben Sie die Funktionsgleichung des abgebildeten Funktionsgraphen an.



1.48. Funktionsscharen (Funktionen mit Parametern)

a) Gegeben sei die reelle Funktion p mit

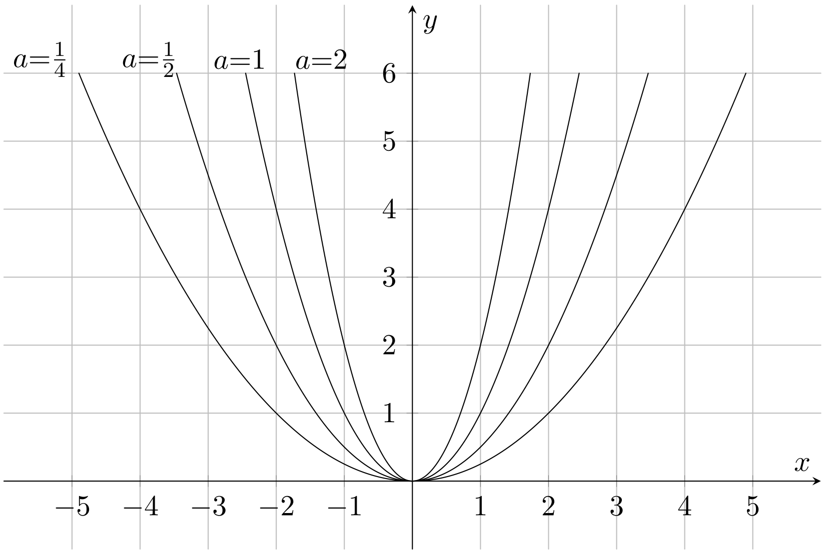
$$p(x) = a(x-d)^2 + e$$

mit $a,\ d,\ e \in \mathbb{R}$.

(i) Beschreiben Sie jeweils den Einfluss der Parameter $a,\ d$ und e.

(ii) Geben Sie d und e so an, dass sich der Scheitelpunkt in $S(-3|2)$ befindet.

b)



Die Funktionsterme der hier dargestellten Graphen können in einer allgemeinen Form dargestellt werden. Welche Darstellung trifft zu?

Kreuzen Sie an.

☐ $f(x) = x^2 + a$

☐ $f(x) = ax^2$

☐ $f(x) = x^{2a}$

☐ $f(x) = \frac{1}{a}x^2$

1.49. Funktionen mit mehreren Variablen

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

1.50. Bijektivität, Surjektivität und Injektivität (von Funktionen)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2. Mathematische Inhalte: Analysis

Folgen und Reihen

2.1. Propädeutisch mit Folgen umgehen

a) Es sei die Folge $a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 9, \ldots$ gegeben. Geben Sie mögliche Werte für $a_4,\ a_5$ und a_6 und anschließend einen Term für a_n an.

b) Geben Sie an, welche Zahlen durch die folgende Vorschrift beschrieben werden:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1, \\ b_{n+1} &= b_n + 2 \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Anmerkung: Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen für Berufliche Gymnasien enthalten. Schülerinnen und Schülern von Beruflichen Gymnasien wird empfohlen, sich vor Studienbeginn zu informieren, ob die Lernvoraussetzung für ihren gewünschten Studiengang vorausgesetzt wird.

2.2. Intuitives Grenzwertkonzept (z. B. $x \to a$, ohne expliziten Folgenbegriff) und Grenzwertbestimmung

Geben Sie an, wie sich jeweils die Funktion f verhält:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}$ für $x \to \infty$,

b) $f(n) = (-1)^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ für $n = 1;\ 2;\ 3, \ldots$.

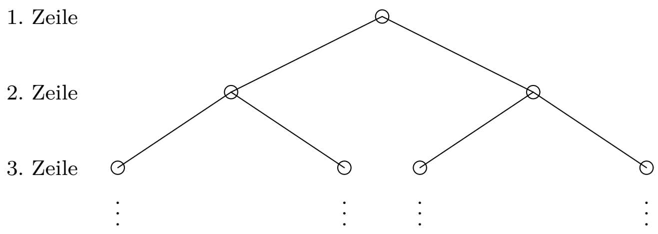
Quelle: cosh (70)

2.3. Arithmetische und geometrische Folgen

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.4. Bildungsvorschrift von Folgen (rekursiv, explizit)

a) Geben Sie einen Term a_n an, mit dem man die Anzahl der Punkte in der n-ten Zeile berechnen kann.



b) Die folgende Vorschrift definiert eine Zahlenfolge:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_{n+1} &= a_n + 5 \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Geben Sie a_3 an.

2.5. Formales Grenzwertkonzept (auf Basis von Folgen) und Grenzwertbestimmung

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.6. Propädeutischer Umgang mit Reihendarstellungen (als Folge von Partialsummen)

a) Wir betrachten die Folge (a_n) mit $a_n = n^2 + 3$, $n \in \mathbb{N}$, sowie die Folge (s_n) mit:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Berechnen Sie s_5.

b) Das Summenzeichen $\sum$ ist eine abkürzende Schreibweise für Summen. Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n$$

für $k, n \in \mathbb{N}$.

Bestimmen Sie für die folgende Summe eine geeignete Darstellung unter Verwendung des Summenzeichens:

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + \cdots + 100^2.$$

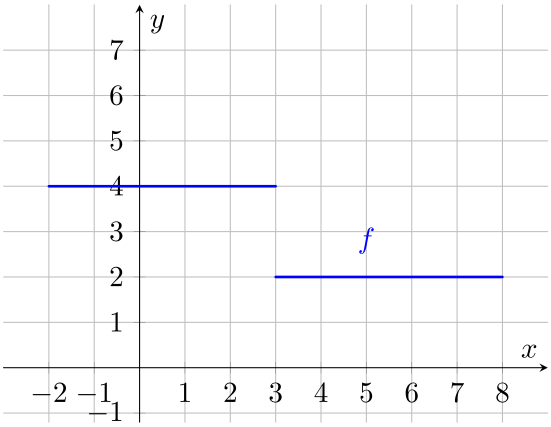
2.7. Arithmetische und geometrische Reihe

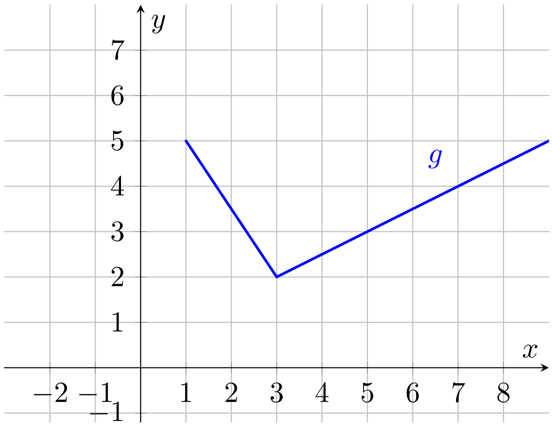
Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

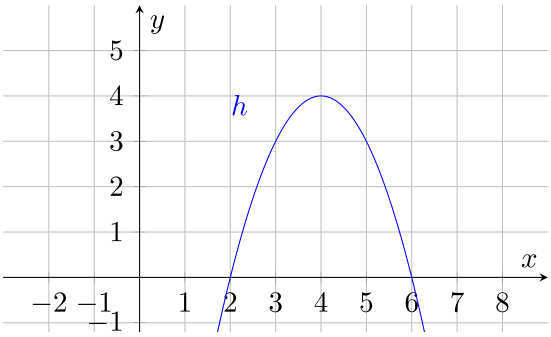
Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung (Riemann-Integral)

2.8. Anschauliches Stetigkeitskonzept

Entscheiden Sie, welcher der Funktionsgraphen zu einer stetigen Funktion gehört.







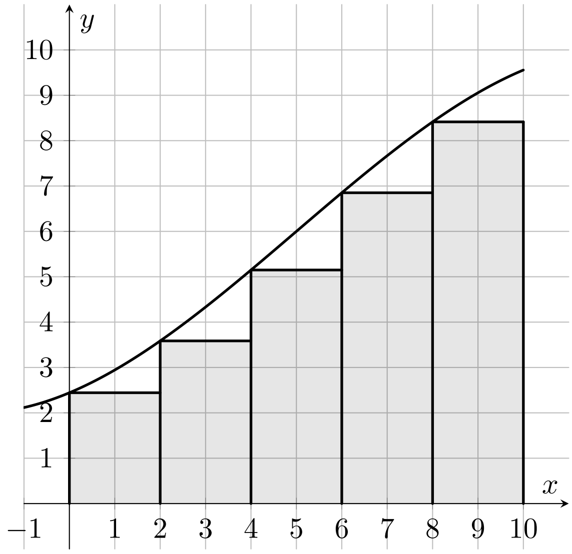
	stetig	nicht stetig
f	☐	☐
g	☐	☐
h	☐	☐

2.9. Formales Stetigkeitskonzept (z. B. als $\epsilon - \delta -$Definition oder mittels Idee der Folgenstetigkeit)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.10. Konzeptuelles Verständnis von Ableitung und Integral

a) Die folgende Darstellung zeigt, wie der Flächeninhalt zwischen einer Kurve und der x-Achse im Bereich $0 \leq x \leq 8$ näherungsweise bestimmt werden kann.

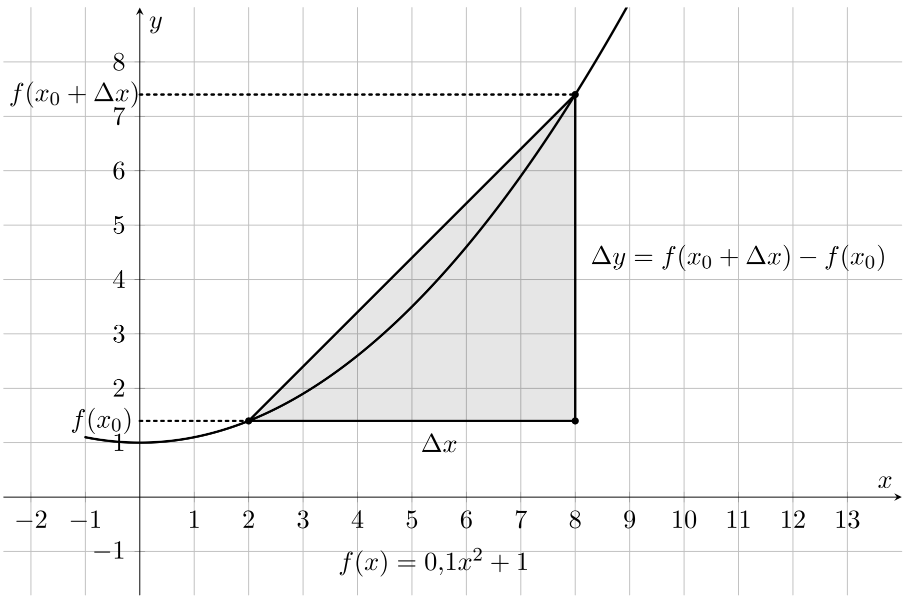


(i) Erläutern Sie die Grundidee der Näherung.

(ii) Formulieren Sie einen Term zur Berechnung des Flächeninhalts auf Basis der dargestellten Näherung.

(iii) Bei dieser Näherung gibt es eine Abweichung vom tatsächlichen Wert. Geben Sie an, wie man den Fehler minimieren könnte.

b) Im Bild wird der mittlere Zuwachs der reellen Funktion f mit $f(x) = 0{,}1x^2 + 1$ zwischen $x_0 = 2$ und $x_0 + \Delta x = 8$ mit Hilfe eines Steigungsdreiecks dargestellt.



(i) Es sei $x_0 = 2$. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

Δx	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
6	6	1
2		
1		
0,1		
0,01		
0,001		

(ii) Erläutern Sie, wie das Steigungsdreieck verändert werden muss, damit man für x_0 die lokale Änderungsrate bestimmen kann.

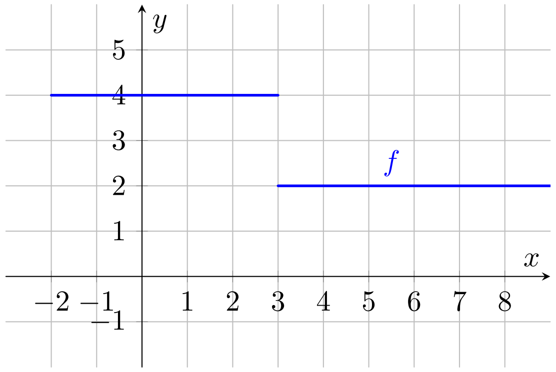
(iii) Geben Sie den Wert an, gegen den die Steigung $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ strebt, wenn Δx gegen 0 strebt. Geben Sie die Bedeutung dieses Wertes im betrachteten Zusammenhang an.

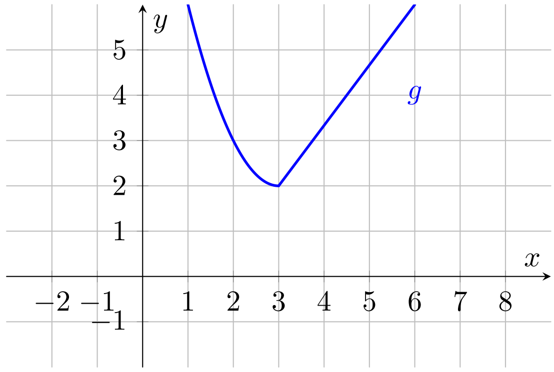
2.11. Definition der Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit mit formalem Grenzwertkonzept auf Basis von Folgen

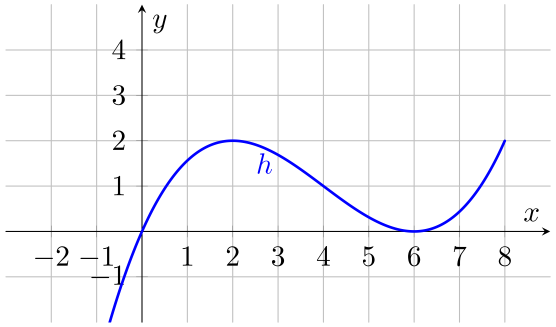
Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.12. Graphische Interpretation von Differenzierbarkeit

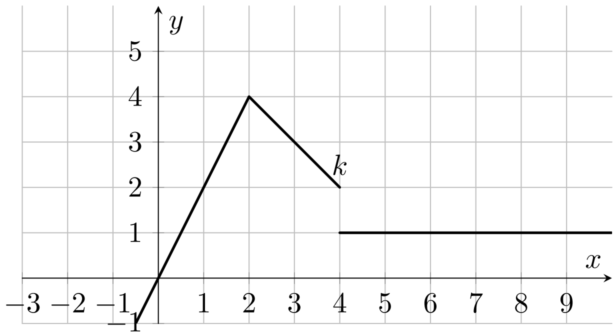
a) Entscheiden Sie, welche der Funktionsgraphen zu einer differenzierbaren Funktion gehören. Begründen Sie Ihre Entscheidung.







b) Kennzeichnen Sie alle Stellen, an denen die Funktion k nicht differenzierbar ist.



2.13. Rechnerisches Differenzieren und Integrieren reeller Funktionen

a) Geben Sie $f'(x)$ an:

(i) $f(x) = x^n$

(ii) $f(x) = \mathrm{e}^x$

(iii) $f(x) = \sqrt{x}$

(iv) $f(x) = \sin(x)$

(v) $f(x) = \cos(x)$

(vi) $f(x) = \mathrm{e}^5$

(vii) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

(viii) $f(x) = (1 - x^2)^9$

Quelle: cosh (74) und cosh (75)

b) Geben Sie jeweils eine Stammfunktion F an:

(i) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

(ii) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

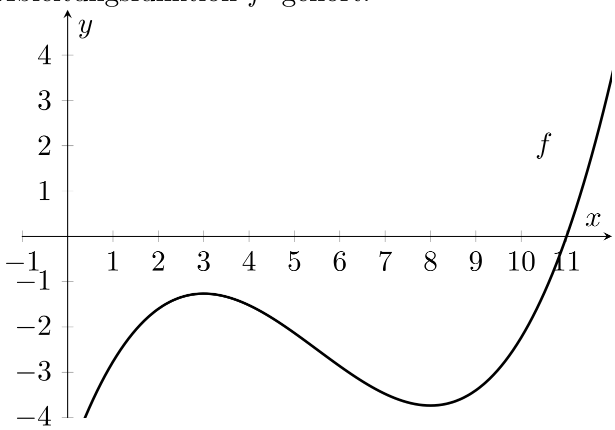
(iii) $f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}$

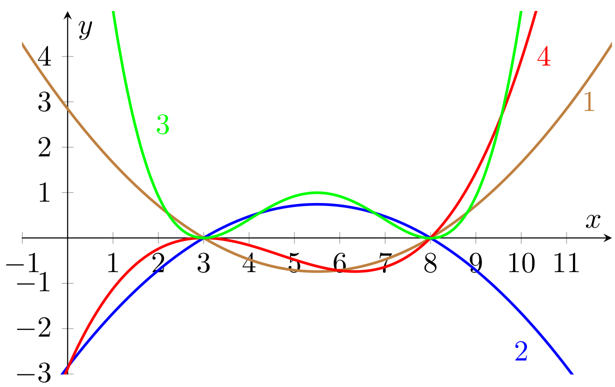
Quelle: cosh (82)

c) Gegeben sei die reelle Funktion f mit $f(x) = x^3$. Berechnen Sie $f'(4)$ und $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

2.14. Anschauliche/graphische Beziehung zwischen Funktions- und Ableitungsgraph

Betrachten Sie den folgenden Graph der Funktion f. Kreuzen Sie an, welcher Graph zu der Ableitungsfunktion f' gehört.





- ☐ brauner Graph 1
- ☐ blauer Graph 2
- ☐ grüner Graph 3
- ☐ roter Graph 4

2.15. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

a) Berechnen Sie:

(i) $\int_{-1}^{2} (2x^3 + 1)\mathrm{d}x$

(ii) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x))\mathrm{d}x$

Quelle: cosh (83)

b) Bestimmen Sie den Funktionsterm von F mit

$$F(x) = \int_3^x \left(6t^2 - 8t\right)\ \mathrm{d}t.$$

c) Gegeben seien die reellen Funktionen f und g mit

$$f(x) = -x^2 + 4 \text{ und } g(x) = 2x + 1.$$

(i) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen.

(ii) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f zwischen den Nullstellen mit der x-Achse einschließt.

(iii) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.

Quelle: cosh (84)

2.16. Definition und Bestimmung von Extrem- und Wendestellen

Gegeben sei die reelle Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x + 1$.

a) Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen von f.

b) Benennen Sie den Bereich, in welchem der Graph von f monoton fallend ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen kurz.

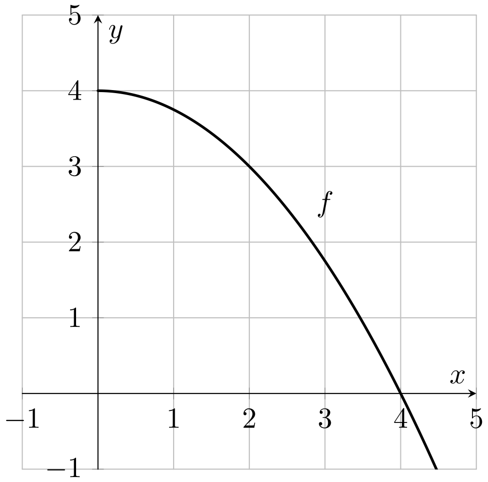
Quelle: cosh (76)

c) Kreuzen Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

	wahr	falsch
An jeder lokalen Maximalstelle ändert sich das Monotonieverhalten der Funktion von streng monoton wachsend zu streng monoton fallend.		
Eine Funktion hat immer an der Stelle ein Minimum, an der die Steigung ihres Graphen am kleinsten ist.		
Bei einer Wendestelle ist die Steigung des Graphen der Funktion immer Null.		
Bei einer Wendestelle hat die Steigung des Graphen der Funktion ein lokales Maximum oder lokales Minimum.		
Eine zweimal differenzierbare Funktion g mit $g(x)'' \neq 0$ hat an der Stelle x eine Extremstelle.		

2.17. Extremwertprobleme

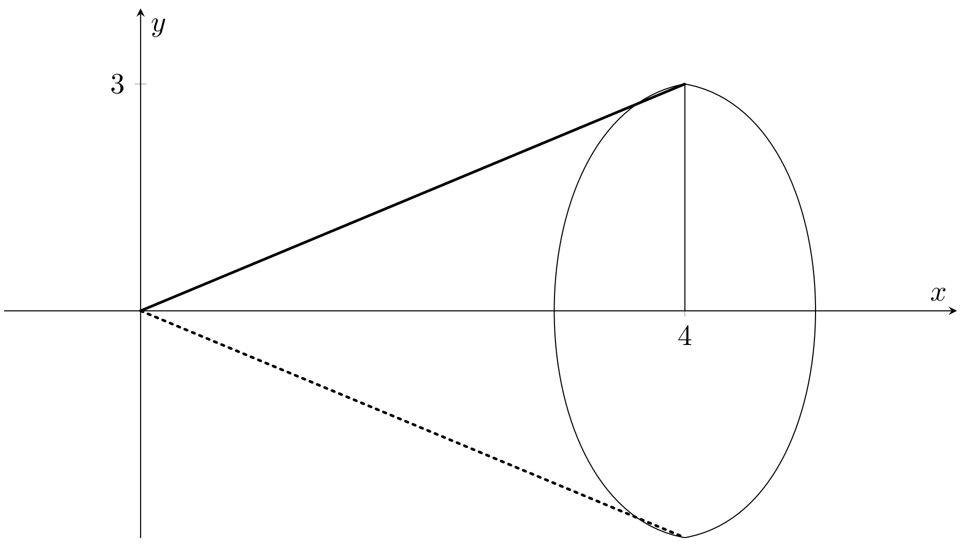
Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den positiven Koordinatenachsen und ein Eckpunkt auf der Parabel mit $f(x) = -0{,}25x^2 + 4$. Bestimmen Sie die Seitenlängen dieses Rechtecks so, dass der Umfang maximal wird und berechnen Sie diesen Umfang.



Quelle: cosh (78)

2.18. Rotationsvolumen

Der dargestellte Teil des Graphen der linearen Funktion f rotiert um die x-Achse. Dadurch entsteht ein sogenannter Rotationskörper.
Entscheiden Sie, welches der folgenden Integrale das Volumen dieses Rotationskörper beschreibt.



a) $\int_0^4 \pi(\frac{3}{4}x)^2 \,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^4 (\pi \cdot \frac{3}{4}x)^2 \,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^3 \pi(\frac{3}{4}x)^2 \,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^4 \pi(\frac{3}{4}x)^3 \,\mathrm{d}x$

e) $\int_0^4 \pi x^2 \,\mathrm{d}x$

2.19. Begriff des Algorithmus

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.20. Einfache Numerische Methoden (wie z. B. Trapezregel oder Newtonverfahren)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

Differentiations- und Integrationsregeln

2.21. Potenz-, Faktor- und Summenregel (Differential- und Integralrechnung)

a) Bestimmen Sie die Ableitung der reellen Funktion f mit $f(r) = 3ar^2$ mit $a \in \mathbb{R}$.

b) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(t) = \frac{2}{t^2} + \sqrt{t}$ mit $t > 0$.

c) Bestimmen Sie

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos(x)\ \mathrm{d}x.$$

d) Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \cos(x) + 2x$.

e) Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$.

f) Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f mit $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}$ mit $a \in \mathbb{R}$.

2.22. Produktregel (Differentialrechnung)

Bestimmen Sie die Ableitung der reellen Funktion f mit

$$f(x) = \cos(x) \cdot \mathrm{e}^x .$$

2.23. Kettenregel (Differentialrechnung)

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit:

a)
$$f(x) = \mathrm{e}^{2x-1} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

b)
$$f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \qquad \text{mit } x \in \mathbb{R}$$

c)
$$f_k(t) = t \cdot \ln(k - t^2) \qquad \text{mit } k > 0, t < \sqrt{k}$$

2.24. Substitutionsregel (Integralrechnung)

a) Bestimmen Sie
$$\int (x+4)^5 \, \mathrm{d}x.$$

b) Bestimmen Sie
$$\int \mathrm{e}^{3x-2} \, \mathrm{d}x.$$

Anmerkung: Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen für Berufliche Gymnasien enthalten. Schülerinnen und Schülern von Beruflichen Gymnasien wird empfohlen, sich vor Studienbeginn zu informieren, ob die Lernvoraussetzung für ihren gewünschten Studiengang vorausgesetzt wird.

2.25. Partielle Integration (Integralrechnung)

a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der reellen Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sin(x)$.

b) (i) Gegeben sei die reelle Funktion g mit $g(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$, $t \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine Stammfunktion von g an.

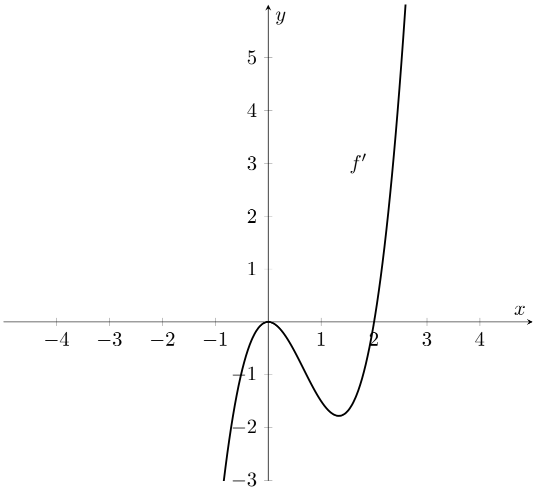
(ii) Berechnen Sie
$$\int_0^3 g(t) \, \mathrm{d}t.$$

Anmerkung: Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen für Berufliche Gymnasien enthalten. Schülerinnen und Schülern von Beruflichen Gymnasien wird empfohlen, sich vor Studienbeginn zu informieren, ob die Lernvoraussetzung für ihren gewünschten Studiengang vorausgesetzt wird.

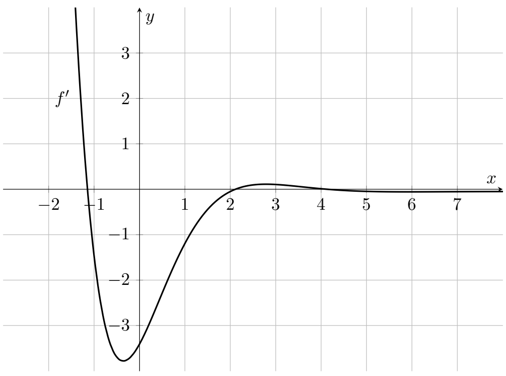
Vorstellungen von Ableitung und Integral

2.26. Ableitung als Tangentensteigung

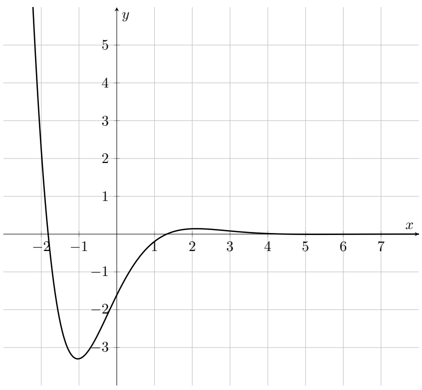
a) Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer reellen Funktion f. Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen von f in der Umgebung der Stelle $x = 0$ sowie in der Umgebung der Stelle $x = 2$.



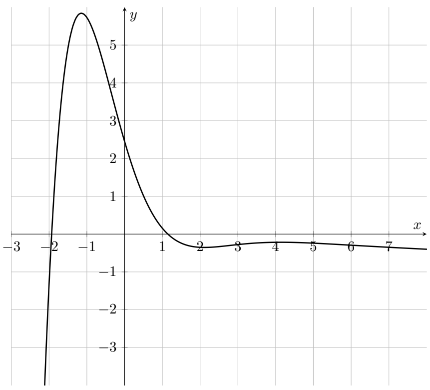
b) Die folgende Abbildung zeigt den Graphen einer Ableitungsfunktion f'.



Welche der folgenden Funktionen kommt für die zugehörige Funktion f in Frage? Kreuzen Sie an.



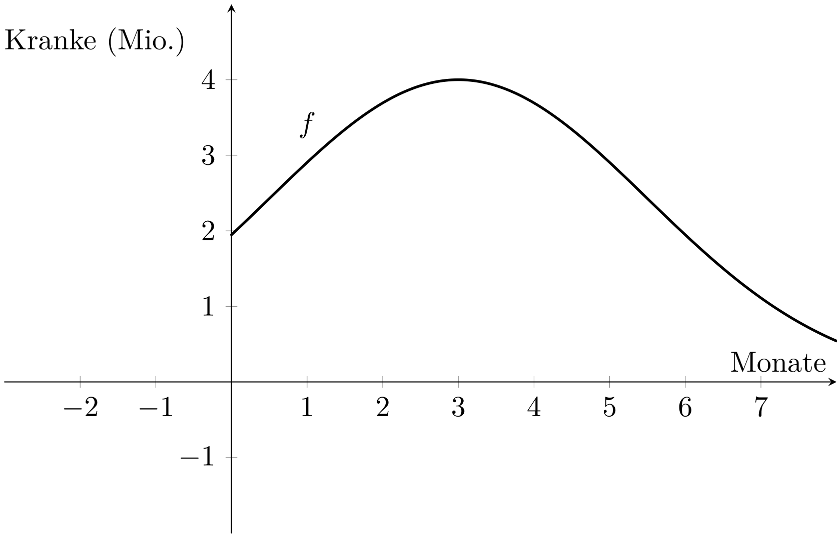
☐ ja ☐ nein



☐ ja ☐ nein

2.27. Ableitung als lokale Änderungsrate

Der Verlauf der Anzahl der an Grippe erkrankten Menschen während einer Grippewelle wird mit Hilfe der reellen Funktion f beschrieben.
Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion f' und erläutern Sie die Bedeutung der Funktion f' im Sachzusammenhang.



2.28. Ableitung als lokale lineare Approximation

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.29. Bestimmtes Integral als orientierter Flächeninhalt

a) Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

(i)
$$\int_0^{\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x$$

(ii)
$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x$$

(iii)
$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x$$

b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der reellen Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ und der x-Achse über dem Intervall $[0; 2\pi]$.

2.30. Bestimmtes Integral als rekonstruierter Bestand aus momentaner Änderungsrate

In ein leeres Becken ohne Abflussmöglichkeit fließt Wasser. Der Wasserzufluss in dieses Becken wird durch die Funktion f mit

$$f(t) = -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 1 \qquad \text{für } t \in [0; 9]$$

beschrieben. Dabei gibt t die Zeit in Stunden an und $f(t)$ den Zufluss in $\frac{m^3}{h}$.

a) Berechnen Sie die Wassermenge, die nach drei Stunden in diesem Becken ist.

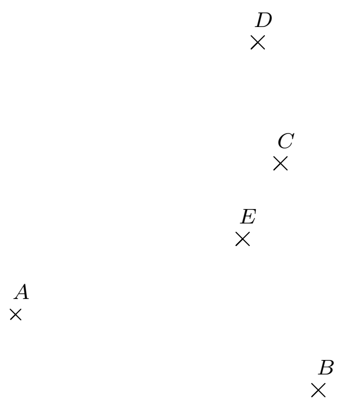
b) Berechnen Sie die maximale Wassermenge, die im angegebenen Zeitintervall $[0; 9]$ in diesem Becken ist.

3. Mathematische Inhalte: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.1. Vektoren als Pfeilklassen

Gegeben sind die Punkte $A,\ B,\ C,\ D$. Zeichnen Sie den Punkt F ein, für den gilt:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$



3.2. Komponentendarstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Gegeben sind die Punkte $A(1|4|-1)$, $B(8|8|4)$ und $C(4|4|3)$. Geben Sie einen Punkt D an, sodass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Bestimmen Sie ebenso die Punkte E und F, sodass $ABEC$ und $AFBC$ ebenfalls Parallelogramme bilden.

3.3. Elementare Operationen mit Vektoren (Addition, Skalarmultiplikation, Skalarprodukt und Kreuzprodukt)

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und die reellen Zahlen r und t. Ergänzen Sie die folgende Tabelle durch Ankreuzen.

	Vektor	Zahl	nicht definiert
$\vec{u} \times \vec{v}$	☐	☐	☐
$\vec{u} \circ \vec{v} \circ \vec{w}$	☐	☐	☐
$(\vec{u} - \vec{v}) - (-\vec{v} + \vec{u})$	☐	☐	☐
$\vec{u} \times \vec{v} + \frac{\vec{w}}{\vec{w}}$	☐	☐	☐
$\lvert\vec{w}\rvert \cdot (\vec{v} \circ \vec{u})$	☐	☐	☐
$(\vec{w} \times \vec{w}) - \frac{\vec{w}}{\lvert\vec{w}\rvert}$	☐	☐	☐

Quelle: Zentralabitur SH Probeklausur 2015

3.4. Skalarprodukt und Kreuzprodukt

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ zueinander orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$, sodass die Vektoren aus a) und $\vec{c}$ einen Quader aufspannen.

c) Bestimmen Sie den Winkel γ, den die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ einschließen.

3.5. Kollinearität von Vektoren

Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{e} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \vec{f} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

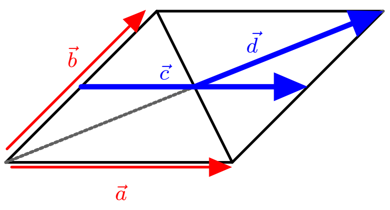
a) Geben Sie an, welche der obigen Vektoren kollinear zueinander sind.

b) Zu einem der Vektoren ist kein kollinearer Vektor angegeben. Geben Sie zu diesem Vektor einen kollinearen Vektor an.

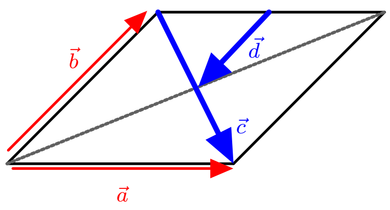
3.6. Linearkombination und lineare Abhängigkeit von Vektoren (über Kollinearität hinaus)

Die abgebildeten Vierecke sind die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Parallelogramme. Stellen Sie jeweils die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.

a)



b)



3.7. Matrizen, Matrizenaddition, Matrix-Vektor-Multiplikation (nur 2x2-Matrizen)

Matrizen und das Rechnen mit ihnen finden sich nicht in den Fachanforderungen des Landes Schleswig-Holstein für allgemeinbildende Schulen (anders als in anderen Bundesländern oder auch in der beruflichen Bildung in Schleswig-Holstein). Diese Lernvoraussetzung wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

3.8. Matrizenmultiplikation und inverse Matrizen (nur 2x2-Matrizen)

Matrizen und das Rechnen mit ihnen finden sich nicht in den Fachanforderungen des Landes Schleswig-Holstein für allgemeinbildende Schulen (anders als in anderen Bundesländern oder auch in der beruflichen Bildung in Schleswig-Holstein). Diese Lernvoraussetzung wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

3.9. Geometrische Transformation (Spiegelung, Rotation, Skalierung) und deren Darstellung durch Matrizen im $\mathbb{R}^2$

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

3.10. Analytische Beschreibung bzw. Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in Ebene und Raum

Gegeben sind die Punkte $A(2|-1|4)$, $B(3|4|1)$ und $C(-1|8|3)$. Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sind die entsprechenden Ortsvektoren.

a) Geben Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte A und B an.

b) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, die durch die Punkte A, B und C aufgespannt wird.

c) Überprüfen Sie, ob der Punkt $D(-2|3|6)$ in der Ebene E liegt.

3.11. Analytische Beschreibung und Darstellung von Kreis und Kugel in Ebene und Raum

Gegeben ist eine Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(2|-3|1)$ und dem Radius $\sqrt{50}$ LE.

a) Geben Sie eine Gleichung der Kugel an.

b) Überprüfen Sie, ob der Punkt $Q(3|4|1)$ auf der Kugel liegt.

Anmerkung: Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen für Berufliche Gymnasien enthalten. Schülerinnen und Schülern von Beruflichen Gymnasien wird empfohlen, sich vor Studienbeginn zu informieren, ob die Lernvoraussetzung für ihren gewünschten Studiengang vorausgesetzt wird.

3.12. Winkel- und Lagebeziehungen (Schnittpunkt, Abstand) von geometrischen Objekten in Ebene und Raum

Gegeben sind die Geraden g und h mit

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-5\\10\\-15\end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \text{ und } h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\-2\\3\end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

Ermitteln Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden.

4. Mathematische Inhalte: Stochastik und bereichsübergreifende Inhalte

Stochastik

4.1. Abzählende Kombinatorik (Permutationen, Variationen, Kombinationen, Zählprinzipien)

10 Kugeln, die von 1 bis 10 durchnummeriert sind, liegen in einer Urne. Es werden nacheinander 3 Kugeln zufällig entnommen. Kreuzen Sie in den folgenden Situationen den jeweils passenden Term für die Anzahl der Möglichkeiten an.

Es werden 3 Kugeln gezogen...	Anzahl			
ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge	□ $\frac{10!}{7!}$	□ 10^3	□ $\binom{10}{7}$	□ $\frac{10!}{3!}$
ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge	□ $\binom{13}{3}$	□ $\frac{12!}{3!}$	□ 3^{10}	□ $\binom{10}{3}$
mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge	□ $\frac{10!}{3!}$	□ $8 \cdot 9 \cdot 10$	□ $\binom{12}{3}$	□ 10^3

Anmerkung: Diese Lernvoraussetzung ist nicht explizit in den Fachanforderungen für Berufliche Gymnasien enthalten. Grundlagen, die für das Verständnis der Binomialverteilung erforderliche sind, werden allerdings unterrichtet. Schülerinnen und Schülern von Beruflichen Gymnasien wird empfohlen, sich vor Studienbeginn zu informieren, ob die Lernvoraussetzung für ihren gewünschten Studiengang vorausgesetzt wird.

4.2. Wahrscheinlichkeit sowie diskrete Zufallsgrößen (Binomialverteilung) und Normalverteilung

Anmerkung: Bei dieser Lernvoraussetzung dürfen Sie den Taschenrechner verwenden.

a) Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsgröße X mit den Parametern $n = 10$ und $p = \frac{1}{3}$.

(i) Berechnen Sie:

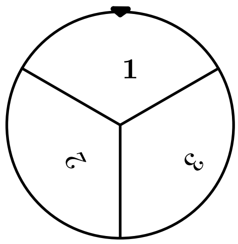
(1) $P(X = 0)$

(2) $P(X < 5)$

(3) $P(3 \leq X \leq 7)$

(ii) Geben Sie ein Würfelexperiment an, bei dem die drei oben beschriebenen Werte Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse sind.

b) Ein Glücksrad mit drei gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet:



Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

(i) Die Zufallsgröße X gibt die Summe der beiden erzielten Zahlen an. Ergänzen Sie in der folgenden Tabelle die fehlenden Werte.

k	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{3}$		

(ii) Betrachtet werden die Ereignisse A und B:
A: „Es wird $(1;3),(2;2)$ oder $(3;1)$ erzielt."
B: „Beim ersten Drehen wird eine 2 erzielt."
Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind.

c) (i) Geben Sie an, unter welcher Bedingung eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p sinnvoll durch die Normalverteilung angenähert werden kann.

(ii) Begründen Sie, warum die Stichprobengröße n bei der Annährung eine Rolle spielt.

(iii) Prüfen Sie für den Fall $p = 0{,}05$, wie groß die Stichprobengröße n mindestens sein muss, damit eine binomialverteilte Zufallsgröße X zu den Parametern n und p gemäß der Laplace-Bedingung durch die Normalverteilung angenähert werden darf.

4.3. Grundlegende Begriffe der deskriptiven Statistik: Mittelwert, Häufigkeit, Spannweite und Standardabweichung

a) Gegeben ist die Verteilung einer Zufallsgröße X durch die folgende Tabelle:

k	1	4	9
$P(X=k)$	$\frac{1}{4}$	0,3	0,45

Berechnen Sie den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von X.

b) Sechs Personen haben die Schuhgrößen 37, 40, 42, 38, 40 und 45.
Bestimmen Sie arithmetischen Mittelwert, Spannweite und Standardabweichung.

Bereichsübergreifende Inhalte

4.4. Konkrete Anwendung der Aussagenlogik (Aussagen und ihre Verknüpfung, Aussageformen, Umkehrung von Aussagen, Rechnen mit Aussagevariablen sowie Existenz- und All-Aussagen)

a) Entscheiden Sie begründet, ob die folgenden Aussagen korrekt sind:

(i) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.

(ii) Eine Polynomfunktion geraden Grades hat keine Nullstellen.

(iii) Quadratische Funktionen haben keine Wendestellen.

(iv) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als größtmögliche Definitionsmenge.

(v) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Wertemenge.

(vi) Alle reellen Funktionen f mit $f(x) = a^x$ (mit $a > 0$) sind monoton wachsend.

(vii) Der Graph der reellen Funktion f mit $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

(viii) Die größtmögliche Definitionsmenge der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-5}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer als 5 sind.

(ix) Die Maximalstellen der Funktion f mit $f(x) = \sin(x)$ sind Wendestellen der Funktion g mit $g(x) = \cos(x)$.

Quelle: cosh (62)

b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a = b$. Finden Sie den Fehler in folgendem falschen Beweis, dass $2 = 1$ gilt. Geben Sie an, bei welchem Folgepfeil und worin der Fehler besteht.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
a &= b \\
\Rightarrow a^2 &= ab \\
\Rightarrow a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\
\Rightarrow (a-b)(a+b) &= (a-b)b \\
\Rightarrow a + b &= b \\
\Rightarrow b + b &= b \\
\Rightarrow 2b &= b \\
\Rightarrow 2 &= 1
\end{aligned}$$

Quelle: Studieneingangstest Rach/Ufer, Item 16

4.5. Quantoren und Prädikatenlogik (Ergänzung zu Aussagenlogik)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

4.6. Beweisverfahren (direkter und indirekter Beweis, vollständige Induktion)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

4.7. Übergeordnete Begriffe wie Definition, Beispiel, Aussage, Satz (allgemeingültige Regel), Beweis, Heuristik

a) Entscheiden Sie, ob es sich jeweils um eine Definition, eine Aussage, einen Satz oder einen Beweis handelt. Es können mehrere Kreuze richtig sein.

	Definition	Aussage	Satz	Beweis
Wenn bei einem Rechteck zwei aneinander grenzende Seiten gleich lang sind, ist es ein Quadrat.				
Bei einem Quadrat sind alle Seiten gleich lang, die Diagonalen halbieren sich und es gibt vier rechte Winkel.				
Ein Viereck heißt genau dann Quadrat, wenn seine Diagonalen gleich lang sind, sich gegenseitig halbieren und senkrecht aufeinander stehen.				
Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist eine Winkelhalbierende eine Symmetrieachse, daher sind die Basiswinkel gleich groß.				
Ein Viereck heißt genau dann Quadrat, wenn alle Seiten gleich lang sind und es einen rechten Winkel besitzt.				
Jedes Rechteck ist auch ein Quadrat.				
Jedes Quadrat ist ein Rechteck.				
Wenn ein Viereck vier gleich lange Seiten hat, ist es eine Raute. Wenn ein Winkel bei einer Raute ein rechter Winkel ist, muss der gegenüberliegende Winkel auch ein rechter Winkel sein, da gegenüberliegende Winkel gleich groß sind. Es bleiben dann 180° Innenwinkel übrig, die auf zwei Winkel aufzuteilen sind, sodass jeder Winkel 90° groß sein muss.				

b) Benennen Sie 3 Problemlösestrategien, um eine Vermutung wie die folgende zu überprüfen: Wenn bei einem Trapez gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, handelt es sich um ein Parallelogramm.

4.8. Kenntnisse zu Zielen mathematischen Arbeitens (z. B. Begriffsbildung, Untersuchung von Strukturen)

Die Mathematik ist eine vielfältige Wissenschaft. Sie wird zu den Geisteswissenschaften (wie z. B. auch die Philosophie) gezählt, manche Teilgebiete sind aber auch ähnlich zu den Naturwissenschaften oder den Sprachwissenschaften, und mathematisch Arbeiten hat auch einen handwerklichen Aspekt. Ordnen Sie jeweils die Beispiele rechts ihrer passenden Zeile auf der linken Seite zu, indem Sie sie verbinden.

(a) Mathematik ist eine Geisteswissenschaft, denn... ... sie ist ein gedankliches Konstrukt mit einem rein logischen Gebäude. ... sie bildet Begriffe losgelöst von der Realität. ... sie untersucht und beschreibt abstrakte Zusammenhänge.	(1) Beispiele: effizientes und geschicktes Rechnen; Taschenrechner, Computer-Geometrie-Systeme, Geodreieck und Zirkel
(b) Mathematik ist ähnlich zu den Naturwissenschaften, denn... ... sie bildet teilweise natürliche Strukturen ab. ... sie wird genutzt, um reale und alltägliche Probleme zu lösen.	(2) Beispiele: Geometrie als Abstrahierung der Formen/Figuren in der Welt; Flugbahnen von Raketen berechnen
(c) Mathematik ist ähnlich zu den Sprachwissenschaften, denn... ... sie nutzt eine eigene formale Sprache, um Erkenntnisse zu formulieren. ... sie hat eigene Regeln zum Umgang mit Zahlen und Symbolen.	(3) Beispiele: Vermutungen mit Hilfe von Sätzen und Definitionen beweisen; verschiedene Zahlbereiche, Funktionstypen; irrationale Zahlen sind nicht periodische nicht abbrechende Dezimalzahlen
(d) Mathematisch arbeiten hat handwerkliche Aspekte, denn... ... man muss rechnerische Anforderungen bewältigen. ... man muss Hilfsmittel sachgerecht einsetzen.	(4) Beispiele: eigene Symbole, Konventionen zur Formulierung von Aussagen oder Beweisen; Rechenregeln

4.9. Fehlerfortpflanzung und Fehler- und Ausgleichsrechnung

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

5. Mathematische Arbeitstätigkeiten

Grundlagen (Rechnen, Hilfsmitteleinsatz, Darstellungen)

5.1. Schnelles und korrektes Ausführen von bekannten Verfahren ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Bestimmen von Ableitung und Integral; Lösen von Gleichungssystemen; Umformungen, wobei einfache Rechenschritte im Kopf gelöst werden können)

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Vereinfachen Sie die folgenden Terme (s. außerdem: 1.9, 1.10):

a)

$$\frac{3a}{2a-a^2}-\frac{2}{2-a}$$

b)

$$\frac{x+y}{x}+\frac{x-y}{y}$$

c) Gleichungen und Gleichungssysteme s. Aufgaben: 1.12, 1.14, 1.15, 1.16, 1.17, 1.18, 1.19, 1.20, 1.21.

d) Ableiten, Integrieren: s. Aufgaben 2.13, 2.15, 2.16, 2.17, 2.21, 2.22, 2.23, 2.24, 2.25, 2.26.

5.2. Sicherer Umgang mit Taschenrechnern und Computern zur Lösung von Aufgaben (z. B. einfache graphische Lösungsverfahren, aber auch kritische Betrachtung von Ergebnissen)

a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS mithilfe eines wissenschaftlichen Taschenrechners:

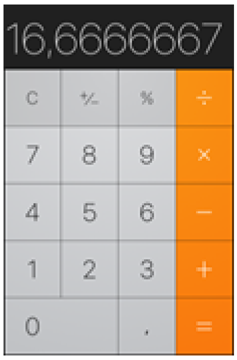
$$\begin{aligned} 1{,}2x + \phantom{1{,}}4y - 3{,}4z &= 7 \\ 3{,}4x - \phantom{1{,}}2y + \phantom{3{,}}4z &= 1{,}7 \\ 5{,}6x - 1{,}4y + 2{,}5z &= 3 \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie mehrere reelle Lösungen der Gleichung

$$\mathrm{e}^{3x}\cos(x) = 7$$

und geben Sie diese im Gradmaß an.

c) Maria, Lena und Paul bekommen von ihrer Oma 50€ geschenkt und sollen diese gerecht teilen. Maria nimmt den Taschenrechner und berechnet 50:3. Sie erhält folgendes Ergebnis:



Paul sagt, dass jeder genau 16,6666667€ erhält. Maria meint, dass das Ergebnis falsch gerundet wurde und jeder $16,\bar{6}$€ erhält. Lena meint, dass auf zwei Stellen gerundet werden muss, da Eurobeträge nur zwei Nachkommastellen haben können, und deshalb erhält jeder 16,67€. Entscheiden Sie, wer von den drei Geschwistern recht hat und geben Sie eine Begründung an.

d) Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = x$ soll bestimmt werden. David nutzt seinen Taschenrechner und gibt die Gleichung ein.

Er nutzt die *solve*-Funktion und erhält die folgende Ausgabe in der Anzeige:

David notiert $\mathbb{L}_x = \{0\}$.
Entscheiden Sie, ob David Recht hat, und begründen Sie Ihre Entscheidung mit Bezug zur abgebildeten Ausgabe des Taschenrechners.

Quelle Bilder: Eigenentwicklung

5.3. Sprachliche Fähigkeiten (Deutsch, ohne spezielle mathematische Fachbegriffe) zum Verstehen von Aufgabenstellungen oder Texten zur Mathematik, z. B. in der Fachliteratur

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Die Mathematik ist eine Wissenschaft, welche aus der Untersuchung von geometrischen Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstand. Für „Mathematik" gibt es keine allgemein anerkannte Definition, heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht. Die Mathematik ist eine der ältesten Wissenschaften. Ihre erste Blüte erlebte sie noch vor der Antike in Mesopotamien, Indien und China, später in der Antike in Griechenland. Von dort datiert die Orientierung an der Aufgabenstellung des „rein logischen Beweisens" und die erste Axiomatisierung, nämlich die euklidische Geometrie. In der frühen Neuzeit führte François Viète Variablen ein, René Descartes eröffnete durch die Verwendung von Koordinaten einen rechnerischen Zugang zur Geometrie. Die Betrachtung von Änderungsraten sowie die Beschreibung von Tangenten und die Bestimmung von Flächeninhalten führten zur Infinitesimalrechnung von Gottfried Wilhelm Leibniz und Isaac Newton. Im Laufe des 19. Jahrhunderts fand die Infinitesimalrechnung durch die Arbeiten von Augustin-Louis Cauchy und Karl Weierstraß ihre heutige strenge Form. Ein anderes Leitproblem der frühen Neuzeit war das Lösen zunehmend komplizierter werdender algebraischer Gleichungen. Zu dessen Behandlung entwickelten Niels Henrik Abel und Évariste Galois den Begriff der „Gruppe", der Beziehungen zwischen Symmetrien eines Objektes beschreibt. Als weitere Vertiefung dieser Untersuchungen können die neuere Algebra und insbesondere die algebraische Geometrie angesehen werden. Als Geburt der klassischen Wahrscheinlichkeitsrechnung kann der Briefwechsel zwischen Blaise Pascal und Pierre de Fermat im Jahr 1654 angesehen werden. Die damit verbundenen neuen Ideen und Verfahren eroberten viele Bereiche, aber über Jahrhunderte hinweg kam es zur Aufspaltung der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie in separate Schulen. Versuche, den Begriff „Wahrscheinlichkeit" direkt zu definieren, gelangen nur für Spezialfälle. Erst das Erscheinen von Andrei Kolmogorows Lehrbuch „Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung" im Jahr 1933 schloss die Entwicklung der Fundamente moderner Wahrscheinlichkeitstheorie ab.

Quelle: adaptiert nach Wikipedia (https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik)

In dem obigen Text finden Sie verschiedene Informationen über die Mathematik als wissenschaftliche Disziplin. Entscheiden Sie auf Basis dieser Informationen, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

	wahr	falsch
Das Beweisen als mathematische Methode entstand erst in neuerer Zeit.		
Es gab in der Mathematik lange Zeit keine Einigkeit, wie der Begriff „Wahrscheinlichkeit" zu definieren ist.		
Ideen von Leibniz und Newton führten zur Infinitesimalrechnung.		
Die Anfänge der Mathematik wurden von den „alten Griechen" gelegt.		
Geometrische Figuren lassen sich nur per Zeichnung und nicht rechnerisch beschreiben.		
Man weiß bisher nicht, was Mathematik ist.		

5.4. Sprachliche Fähigkeiten (Englisch, ohne spezielle mathematische Fachbegriffe) zum Verstehen von Aufgabenstellungen oder Texten zur Mathematik, z. B. in der Fachliteratur

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

5.5. Sicherer Umgang mit grundlegender mathematischer Formelsprache (ohne elektronische Hilfsmittel)

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

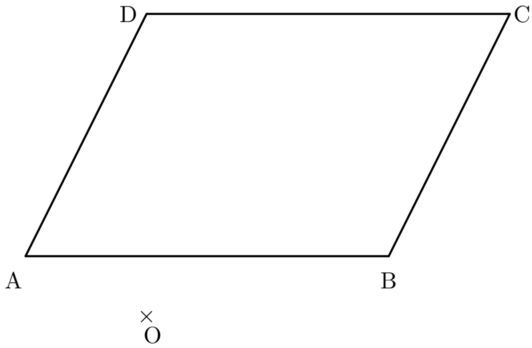
Wir betrachten ein Zufallsexperiment mit den beiden folgenden Ereignissen:
A: Ein Kind geht bei rot über die Ampel.
B: Ein Kind ist ein Junge.

Beschreiben Sie, welche Bedeutung $P_A(B)$ hat.

5.6. Sicherer Umgang mit Standarddarstellungen von Termen/Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen, Vektoren und geometrischen Objekten (ohne elektronische Hilfsmittel)

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Gegeben ist folgendes Parallelogramm:

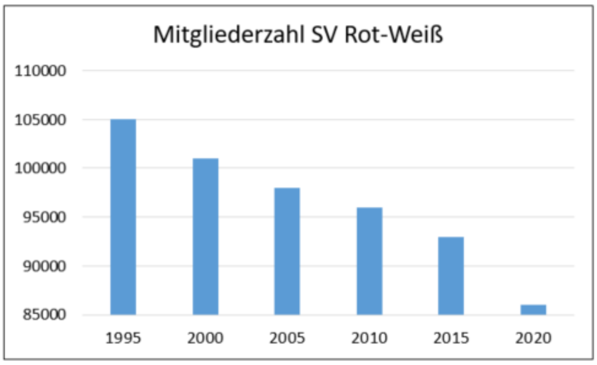


Es gilt

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

Zeichnen Sie den Punkt P ein.

b) Ben sieht sich das folgende Diagramm über die Mitglieder seines Lieblingsvereins an. Er meint, dass der Verein aufgrund des Mitgliederschwunds bald aufgelöst werden muss, da es keine Mitglieder mehr gibt. Hat er recht? Begründen Sie Ihre Antwort.



Quelle Bild: Eigenentwicklung

c) Die folgende Tabelle gibt die Abiturientenzahlen für einen Landkreis an. Berechnen Sie die absolute Veränderung der Anzahl der Abiturientinnen und Abiturienten aus den ländlichen Regionen von 2018 nach 2019.

		Stadt	Land
Abitur 2018	männlich	152	254
	weiblich	201	299
Abitur 2019	männlich	263	265
	weiblich	312	301

5.7. Sicherer Umgang mit dem Summenzeichen und dem Produktzeichen

Zum Summenzeichen sehe 2.6.
Das Produktzeichen ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

5.8. Schnelles und sicheres Wechseln zwischen unterschiedlichen Standarddarstellungen (z. B. bei Termen/Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen, Vektoren, geometrischen Objekten sowie Summen- und Produktzeichen) ohne elektronische Hilfsmittel

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Es seien einige Werte der ganzrationalen Funktion h gegeben:

x	$h(x)$
-2	-8
-1	$4{,}5$
0	8
2	0
4	-8

Eine der folgenden Funktionsgleichungen definiert die Funktion. Kreuzen Sie an, welche.

$h(x) = x^3 - 2x^2 + 8$	
$h(x) = 2x^3 + 8$	
$h(x) = 8x + 8$	
$h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 8$	

Skizzieren Sie den dazugehörigen Funktionsgraphen im Intervall $[-2; 4]$.

b) Begründen Sie zeichnerisch, dass die Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$ kommutativ ist, d. h.

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}.$$

5.9. Entwickeln von Visualisierungen zu mathematischen Zusammenhängen (d. h. geeignete Auswahl einer Darstellungsart und Anfertigen der Darstellung ohne elektronische Hilfsmittel)

a) Gegeben seien die reellen Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 4$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$. Visualisieren Sie den nachfolgenden Rechenansatz:

$$A = \int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2} g(x)\mathrm{d}x$$

b) Fertigen Sie zu den folgenden beiden Sachverhalten jeweils eine Skizze an und leiten Sie damit die allgemeine Flächeninhaltsformel des Dreiecks her.

(i) Ein rechtwinkliges Dreieck kann als „halbes Rechteck“ aufgefasst werden, indem ein Rechteck an einer Diagonalen zerschnitten wird. Der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks lässt sich damit als die Hälfte des Produkts der Kathetenlängen darstellen.

(ii) Der Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks kann ermittelt werden, indem das Dreieck an einer innenliegenden Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird und deren Flächeninhalte auf dem oben genannten Weg berechnet werden.

c) Für welches Intervall sind die Funktionswerte für Sinus und Kosinus beide positiv? Kreuzen Sie an.

Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$	
Zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π	
Zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$	
Zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π	

Mathematisches Argumentieren und Beweisen

5.10. Verstehen und Explorieren von mathematischen Behauptungen und Sätzen (was wird ausgesagt, für welche Klasse von mathematischen Objekten gilt dies bzw. gilt dies nicht aufgrund der Voraussetzungen)

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Es sei $\mathrm{e} = 2{,}71...$ die Eulersche Zahl. Für je zwei Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ und $x, y > \mathrm{e}$ gilt

$$x^y > y^x.$$

a) Prüfen Sie die Behauptung anhand eines Zahlenbeispiels.

b) Gegeben sind die Zahlen

$$(8^9)^{(9^8)} \text{ und } (9^8)^{(8^9)}.$$

Entscheiden Sie ohne Rechnung, welche Zahl größer ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

c) Prüfen Sie, ob die Behauptung auch ohne die Voraussetzung $x, y > \mathrm{e}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ stimmt.

5.11. Verstehen und Prüfen von mathematischen Beweisen

a) Prüfen Sie die Äquivalenzumformung auf Korrektheit:

$$\begin{aligned} & & (2x+2)^2 &= 3x(x+3)+4 & (1)\\ &\Leftrightarrow & 4x^2+8x+4 &= 3x^2+9x+4 & (2)\\ &\Leftrightarrow & x^2 &= x \quad | : x & (3)\\ &\Leftrightarrow & x &= 1 & (4) \end{aligned}$$

b) Im Folgenden lesen Sie einen Beweis dafür, dass für jede positive ungerade ganze Zahl n die Zahl $n^2 - 1$ durch 8 teilbar ist:

Sei n eine positive ungerade ganze Zahl. Dann können wir n schreiben als $n = 2m + 1$ mit einer nicht-negativen ganzen Zahl m. Damit gilt

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2m+1)^2 - 1 & (1)\\ &= 4m^2 + 4m + 1 - 1 & (2)\\ &= 4m^2 + 4m & (3)\\ &= 4m(m+1). & (4) \end{aligned}$$

Es muss entweder m oder $m+1$ durch 2 teilbar sein. Also hat die Zahl $m(m+1)$ den Teiler 2 und damit ist die Zahl $4m(m+1)$ durch 8 teilbar.

(i) Begründen Sie, warum entweder die Zahl m oder die Zahl $m + 1$ durch 2 teilbar sein muss.

(ii) Geben Sie an, an welcher Stelle zum ersten Mal ausgenutzt wird, dass n ungerade ist.

5.12. Erkennen von Zusammenhängen und Strukturen in gegebenen mathematischen Situationen (z. B. einfache Schlussfolgerungen oder Äquivalenzen)

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

In einem Dreieck wird der Winkel an einer Ecke verändert, ohne die Länge der anliegenden Seiten zu verändern.

a) Was passiert mit der gegenüberliegenden Dreiecksseite?

b) Beschreiben Sie den beobachteten Zusammenhang möglichst präzise mit mathematischen Mitteln.

5.13. Entwickeln und Formulieren mathematischer Vermutungen und unterstützender Plausibilitätsargumente

a) Es sei $a \in \mathbb{N}$ mit $a \geq 2$. Sortieren Sie die folgenden Brüche der Größe nach, beginnend mit dem kleinsten Bruch. Geben Sie anschauliche und formal-mathematische Argumente für die Anordnung an.

$$\frac{a-1}{a}; \quad \frac{a-1}{a+1}; \quad \frac{a}{a+1}$$

b) Gegeben seien zwei reelle Funktionen f und g, deren Graphen sich an den Stellen a und b, $a < b$ schneiden. Es gelte zudem

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 0.$$

Skizzieren Sie drei Beispiele für die Graphen von f und g im Intervall $[a; b]$, sodass die obige Gleichung erfüllt ist.

5.14. Entwickeln und Formulieren mathematischer Beweise zu einer gegebenen Behauptung

Gegeben ist die folgende Rechenvorschrift:

Nehmen Sie eine zweistellige natürliche Zahl mit Zehnerziffer x und Einerziffer y. Vertauschen Sie die Ziffern Ihrer Zahl und addieren Sie diese neue Zahl zu der von Ihnen gewählten. Abschließend dividieren Sie durch die Quersumme Ihrer ausgesuchten Zahl.

a) Berechnen Sie das Ergebnis dieser Rechenvorschrift an zwei Beispielen.

b) Beweisen Sie, dass unabhängig von der Wahl der Ausgangszahl immer das gleiche Ergebnis herauskommt. Betrachten Sie dazu eine zweistellige natürliche Zahl mit Zehnerziffer x und Einerziffer y, also eine Zahl mit dem Wert $10x + y$ und der Quersumme $x + y$.

Kontrollstrategien

5.15. Überschlagsrechnungen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Gegeben seien eine Kiste der Größe $20\,\text{cm} \times 50\,\text{cm} \times 30\,\text{cm}$ und Kugeln mit Durchmesser $6\,\text{cm}$. Es wird behauptet, dass maximal 110 Kugeln in die Kiste passen. Widerlegen Sie diese Aussage mithilfe einer Überschlagsrechnung.

b) Geben Sie für die folgenden Aufgaben geeignete Überschlagsrechnungen an und berechnen Sie den Wert:

   (i) $10^3 \cdot 4{,}5 \cdot 12{,}7 \cdot 10^{-7}$

   (ii) $17324 \cdot 4{,}68$

c) Bestimmen Sie mithilfe einer Überschlagsrechnung ein Intervall mit der maximalen Länge von 6000, in welchem der Wert des Produkts $3{,}324 \cdot 7623{,}6$ liegt.

5.16. Größenordnungen abschätzen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Ordnen Sie die angegebenen Zahlen der Größe nach. Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl.

$$0; \quad (0{,}5)^{-2{,}4}; \quad 1; \quad 4; \quad 4^{-3{,}8}; \quad 0{,}25; \quad 2^{-3{,}3}; \quad (0{,}5)^{2{,}4}; \quad 8; \quad 2^{-3}$$

Quelle: cosh (12)

5.17. Plausibilitätsüberlegungen bei Argumentationen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

An einen Kreis werden an vier verschiedenen Punkten Tangenten angelegt.

a) Geben Sie an, welche Arten von Vierecken entstehen können. Fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

b) Erläutern Sie, weshalb jedes so entstehende Rechteck ein Quadrat ist.

5.18. Fehler systematisch eingrenzen, identifizieren bzw. grob abschätzen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Die Schülerinnen und Schüler einer Klasse sollen das Maximum der überall zweimal differenzierbaren Funktion f im Intervall $[0; 10]$ bestimmen. Eine Schülerin glaubt, das Maximum an der Stelle $x = 5$ gefunden zu haben, da sie $f'(5) = 0$ und $f''(5) \neq 0$ berechnet hat und $x = 5$ die einzige Stelle im Intervall mit $f'(x) = 0$ ist. Ein weiterer Schüler widerspricht mit den Worten: „Ich habe ausgerechnet, dass $f(0) = 10$ und $f(5) = \frac{1}{2}$ gilt. Dann hat f im Randpunkt an der Stelle $x = 0$ das Maximum und nicht in 5!“

   Nehmen Sie Stellung zu den beiden Schülerlösungen und identifizieren Sie mögliche Fehler.

b) Gegeben ist eine Messreihe mit den folgenden Werten:

   28; 45; 50; 48; 41; 37; 43; 21; 49; 47.

   Berechnet wurde ein arithmetischer Mittelwert von 50,3. Begründen Sie, dass dieses Ergebnis falsch sein muss, und geben Sie mögliche Fehlerquellen an.

Mathematisches Kommunizieren

5.19. Schriftliche mathematische Formulierungen (mit Fachsprache und Fachsymbolik) sprachlich verstehen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Geben Sie den vollständigen mathematischen Inhalt der folgenden Aussage in Worten wieder.

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0).$

5.20. Mathematik in präziser mathematischer Notation unter Einsatz der Fachsprache und Fachsymbolik schriftlich darstellen

a) In einer Urne liegen 30 Kugeln, die von 1 bis 30 durchnummeriert sind. Es wird eine Kugel zufällig entnommen. Die Ergebnismenge Ω wird mit $\Omega = \{1, ..., 30\}$ festgelegt.

(i) Geben Sie das Ereignis A „Die entnommene Zahl ist durch 3 teilbar“ in Mengenschreibweise an.

(ii) Es sei A das Ereignis „Die entnommene Zahl ist durch 3 teilbar“ und

$$B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}.$$

Schreiben Sie $A \cap B$ in Mengenschreibweise.

b) Sei f eine reelle Funktion. Geben Sie die folgenden Bedingungen in symbolisch-mathematischer Notation an.

(i) An der Stelle $x = 2$ liegt ein globales Maximum vor.

(ii) Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse bei $y = -2{,}5$.

(iii) Die Nullstellen der Funktion liegen bei $x = 1$ und $x = 5$.

(iv) Die Funktion schließt bei $x = 7$ knickfrei an eine Funktion g an.

c) Gegeben seien Punkte P, Q und R im Raum. Geben Sie folgende Aussagen in symbolisch-mathematischer Notation an.

(i) Der Abstand von P zu Q ist gleich dem Abstand von Q zu P.

(ii) Der Abstand zwischen P und Q ist kleiner oder gleich der Summe der Abstände zwischen P und R und zwischen R und Q.

(iii) Der Abstand zweier Punkte ist genau dann Null, wenn die Punkte identisch sind.

5.21. Lernförderliche und präzise Fragen stellen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Patrick sagt: „Im Buch steht $0,\overline{9} = 1$. Ich verstehe das nicht.“ Überlegen Sie zwei Aspekte, die Patrick nicht verstanden haben könnte, und formulieren Sie dazu jeweils eine präzise Frage, die er seiner Lehrkraft stellen könnte.

b) Lena sagt: „Ich verstehe die Formel

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

nicht.“ Überlegen Sie zwei Aspekte, die Lena nicht verstanden haben könnte, und formulieren Sie dazu jeweils eine präzise Frage, die sie ihrer Lehrkraft stellen könnte.

5.22. Mathematische Sachverhalte mündlich erklären

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

a) Geben Sie einen Unterschied zwischen Wahrscheinlichkeiten und relativen Häufigkeiten an. Erläutern Sie, wie beide Begriffe zusammenhängen.

b) Es sei f im Folgenden eine auf $\mathbb{R}$ definierte und differenzierbare Funktion.
   (i) Begründen Sie, weshalb die erste Ableitung von f an lokalen Extremstellen den Wert 0 annimmt.
   (ii) Erläutern Sie, weshalb es nicht genügt, bei der Suche nach Extremstellen nur die erste Ableitung zu prüfen.
   (iii) Mit Hilfe von f werde im Intervall $[a;b]$ ein Temperaturverlauf modelliert. Es kann Extremstellen $x \in [a;b]$ geben, die nicht die Bedingung $f'(x) = 0$ erfüllen. Skizzieren Sie ein entsprechendes Beispiel eines Funktionsgraphen.
   (iv) Formulieren Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für das Vorliegen eines Wendepunktes.

5.23. Zielgerichtet mit Lehrenden oder Studierenden über Mathematik diskutieren

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Diese Lernvoraussetzung ist nicht durch eine Aufgabe zur Einzelbearbeitung abprüfbar, wird aber für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt. Zur Übung empfehlen wir Ihnen, Ihre Lösungen zu anderen Aufgaben dieses Kataloges mit anderen Personen zu besprechen und verschiedene Lösungswege zu diskutieren.

Mathematisches Definieren

5.24. Mathematische Definitionen nachvollziehen (u. a. Beispiele & Gegenbeispiele angeben; prüfen, ob ein Beispiel unter die Definition fällt oder nicht)

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

An eine Funktion f, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, werden die folgenden Bedingungen gestellt:

(1) für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(2) für alle $a, x \in \mathbb{R}$ gilt $f(ax) = af(x)$.

Prüfen Sie, ob die folgenden Funktionen diese Bedingungen erfüllen:

a) $f(x) = 3x + 4$

b) $f(x) = k \cdot x$ mit $k \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^x$

d) $f(x) = x^2$

5.25. Mathematische Begriffe anhand ihrer Definition erklären

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Erläutern Sie die geometrische Bedeutung des Begriffs der linearen Abhängigkeit von drei Vektoren anhand seiner Definition.

5.26. Mathematische Definitionen bekannter Begriffe nutzen und angemessen formulieren

a) Geben Sie die Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 5. Grades an.

b) Geben Sie den Grad der ganzrationalen Funktion f mit

$$f(x) = 0x^5 + 3x^4 + x^2$$

an.

c) Geben Sie die allgemeine Form einer ganzrationalen Funktion vom Grad n an.

d) Formulieren Sie die Definition eines gleichschenkligen Dreiecks.

e) Formulieren Sie die Definition der Ableitung einer Funktion f an der Stelle a.

Anmerkung: Die Lernvoraussetzung wird erst ab c) abgedeckt. Teil a) und b) sind nur vorbereitend.

5.27. Eigene Definitionen zu (einfachen) selbst abgeleiteten mathematischen Begriffen entwickeln

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

Mathematisches Problemlösen

5.28. Gegebene mathematische Probleme verstehen und präzise wiedergeben

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Betrachten Sie folgende mathematische Aussage:

$$\lim_{\phi \to 0} \frac{\sin(\phi)}{\phi} = 1.$$

Diese Aussage sorgt bei vielen für Verwunderung. Worin besteht das vermeintliche Problem?

5.29. Gegebene Lösungen zu mathematischen Problemen verstehen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Gegeben ist folgende Fragestellung:

Für welche natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist $n(2^{2n} - 1)$ durch 6 teilbar?

Dazu gibt es folgende Argumentationskette:

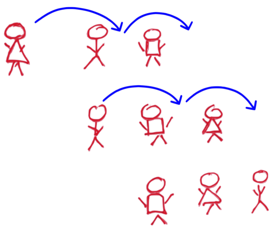
Es gilt $n(2^{2n} - 1) = n(2^n - 1)(2^n + 1)$, weshalb $n(2^{2n} - 1)$ genau dann durch 6 teilbar ist, wenn mindestens einer der Faktoren n, $2^n - 1$ und $2^n + 1$ durch 2 und mindestens einer dieser Faktoren durch 3 teilbar ist. Für ungerades n sind alle drei Faktoren ungerade, weshalb $n(2^{2n} - 1)$ nicht durch 6 teilbar ist.
Für gerades n ist mit n selbst einer der Faktoren durch 2 teilbar. 2^n ist als Potenz von 2 nicht durch 3 teilbar. Hat 2^n bei Division durch 3 den Rest 1, so ist $2^n - 1$ durch 3 teilbar. Hat dagegen 2^n bei Division durch 3 den Rest 2, so ist $2^n + 1$ durch 3 teilbar. Deshalb ist einer der Faktoren $2^n - 1$ und $2^n + 1$ durch 3 teilbar.

a) Was folgt für das betrachtete Problem? Geben Sie eine Lösung an.

b) Benennen Sie wichtige mathematische Mittel und Argumente, die in der Argumentation genutzt werden.

5.30. Allgemeine heuristische Prinzipien sicher und flüssig verwenden (Skizze anfertigen, systematisch probieren, in Teilprobleme zerlegen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden)

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

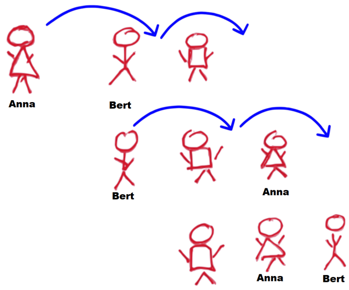


Eine ungerade Anzahl von Kindern spielt Bockspringen. Es springt immer das hinterste Kind über die anderen, bis es ganz vorne steht. Wie viele Sprünge sind notwendig, bis das Kind, das zuerst in der Mitte stand, ganz vorne steht? Erläutern Sie, wie Sie vorgegangen sind.

Quelle Abbildung: Die Abbildung wurde von Anke Lindmeier und Helmut Mallas erstellt und zum Abdruck freigegeben.

5.31. Aus gegebenen Lösungen zu mathematischen Problemen Lösungsstrategien erarbeiten

Im Folgenden sind eine Aufgabe und ein Lösungsweg einer Person dargestellt. Dabei sind verschiedene Lösungsstrategien zu erkennen. Markieren Sie im Lösungsweg Textstellen, an denen Lösungsstrategien zu erkennen sind. Benennen Sie die Lösungsstrategien.

<table>
<tr><td colspan="2">Aufgabe:
Eine ungerade Anzahl von Kindern spielt Bockspringen. Es springt immer das hinterste Kind über die anderen, bis es ganz vorne steht. Wie viele Sprünge sind notwendig, bis das Kind, das zuerst in der Mitte stand, ganz vorne steht? Erläutern Sie, wie Sie vorgegangen sind.</td></tr>
<tr><td>Lösungsweg:</td><td>Lösungsstrategie:</td></tr>
<tr><td>Ich habe mir zuerst überlegt, wie die Situation bei drei Kindern aussieht. Dazu habe ich mir eine Skizze gemacht.


Die Frage ist, wann Bert vorne steht. Anna springt zweimal. Dann springt Bert zweimal. Dann steht er vorne. Hier sind es also 4 Sprünge. Ich habe vermutet, es gilt immer $2 \cdot (\text{Anzahl Kinder} - 1)$. Dann habe ich mir die Situation mit 5 Kindern vorgestellt. Ich bin dabei auf 12 Sprünge gekommen. Das ist aber nicht $2 \cdot (5-1)$, also war meine Vermutung falsch. Bei 7 Kindern habe ich mir überlegt, dass man immer über die anderen 6 vor sich springen muss, wenn man dran ist. Ich wusste also, ich muss mir nur noch überlegen, wie viele Kinder sich bewegen müssen. Das sind bei 7 Kindern genau 4 Kinder. Da wurde mir klar, dass es genau (Anzahl Kinder hinter dem Mittelkind+1) Kinder sind, die springen müssen. Über die Anzahl der Kinder hinter dem Mittelkind musste ich noch kurz nachdenken, aber das ist wie beim gerechten Teilen von Gummibärchen auf zwei Kinder, dann muss man eines wegnehmen, dann geht es. Also (Anzahl der Kinder−1) : 2. Das habe ich dann noch allgemein aufgeschrieben. Statt Anzahl der Kinder habe ich A geschrieben.
Meine Lösung lautet also: $(((A-1):2)+1)\cdot(A-1)$.</td><td></td></tr>
</table>

Quelle Abbildung: Die Abbildung wurde von Anke Lindmeier und Helmut Mallas erstellt und zum Abdruck freigegeben.

5.32. Rolle allgemeiner Problemlösestrategien bei ihrer Verwendung explizit erläutern

Folgende Aufgabe ist gegeben:

Aus einem DIN A4 Papier wird eine offene quaderförmige Schachtel gebastelt. Untersuchen Sie, welche Volumina möglich sind.

a) Das maximale Volumen der Schachtel kann durch eine Extremwertaufgabe berechnet werden. Nennen Sie zwei weitere Vorgehensweisen, wie man andere mögliche Volumina ermitteln kann.

b) Benennen Sie die Problemlösestrategien, die bei der jeweiligen Vorgehensweise angewendet werden, und erläutern Sie deren Rolle bei der Lösung.

Quelle: Material Oliver Thomsen

5.33. Notwendigkeit von Fallunterscheidungen erkennen und Fallunterscheidungen vornehmen

Diese Lernvoraussetzung wird auf erhöhtem Niveau erwartet.

Geben Sie an, bei welcher der folgenden Aufgaben eine Fallunterscheidung notwendig ist.

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Gleichungen und Ungleichungen jeweils erfüllt?

a) $|2x - 3| = 8$

b) $|3x - 6| \leq x + 2$

c) $\frac{x+1}{x-1} \leq 2$

d) $x + 5 > 3$

Quelle: cosh (5)

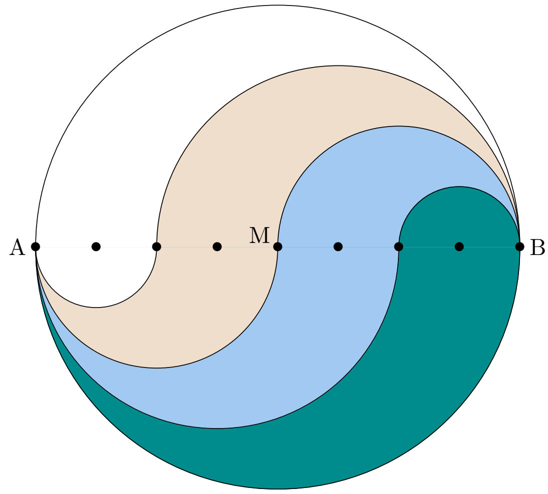
5.34. Probleme mit mindestens drei Lösungsschritten lösen

Siehe 5.35

5.35. Komplexe Probleme in einfache äquivalente Teilprobleme zerlegen

Zeigen Sie durch eine kommentierte Rechnung, dass alle Teilflächen der im Bild dargestellten Figur den gleichen Umfang haben.

$$\overline{AM} = \overline{MB} = r$$



Mathematisches Modellieren

5.36. Beschreibung außermathematischer Situationen mithilfe mathematischer Werkzeuge

Übertragen Sie die Situation der folgenden Aufgabe in ein mathematisches Modell. Lösen Sie die Aufgabe anschließend.

Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt $20\,\mathrm{ms}^{-1}$ zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten $10s$ nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

Quelle: cosh (2)

5.37. Lösung außermathematischer Problemsituationen mithilfe mathematischer Werkzeuge

Die Geschwindigkeit v eines Autos beträgt $20\,\mathrm{ms}^{-1}$ zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten $10\,\mathrm{s}$ nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab.

a) Bestimmen Sie die Strecke, die das Auto seit Beobachtungsbeginn bis zum Stillstand zurückgelegt hat.

b) Nennen Sie das zur Lösung von a) verwendete mathematische Verfahren.

Quelle: cosh (2)

5.38. Kontrolle von Ergebnissen einer mathematischen Modellierung im Hinblick auf Stimmigkeit in Realsituationen

Kim misst die Lufttemperatur erstmals um 6 Uhr morgens und dann um 14 Uhr. Er notiert sich folgende Messwerte:

Zeit in h (seit 6 Uhr)	0	8
Lufttemperatur in °C	12	20

Kim berechnet die Temperatur für 22 Uhr und erhält 28°C. Mit welchem Modell hat er gerechnet? Bewerten Sie die Vorgehensweise im Sachzusammenhang.

5.39. Bewerten verschiedener mathematischer Modelle derselben Realsituation

Kim misst die Lufttemperatur erstmals um 6 Uhr morgens und dann um 14 Uhr. Er notiert sich folgende Messwerte:

Zeit in h (seit 6 Uhr)	0	8
Lufttemperatur in °C	12	20

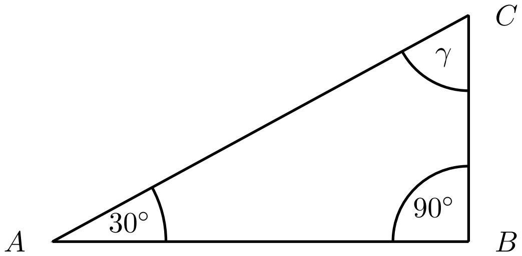
Beurteilen Sie, inwieweit die Sinusfunktion besser als eine lineare Funktion geeignet ist, diese Realsituation über mehrere Tage zu beschreiben.

5.40. Erkennen des genuin mathematischen Beitrags beim Lösen außermathematischer Probleme mithilfe mathematischer Werkzeuge

Beschreiben Sie die Bedeutung des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ und geben Sie zwei verschiedene Fragestellungen im Sachkontext an, die mithilfe des Binomialkoeffizienten gelöst werden können.

5.41. Reflektieren des Nutzens und der Grenzen mathematischer Modellierungen für reale Problemsituationen

Ein Pilot plant seine Flugroute des heutigen Tages von der Stadt A zur Stadt B, anschließend zur Stadt C und dann zurück zur Stadt A. Er erstellt die folgende Zeichnung:



Er berechnet den Winkel γ der Kursänderung für den Rückflug mithilfe des Summensatzes für die Innenwinkel eines Dreiecks. Begründen Sie, weshalb dieses Vorgehen für größere Distanzen, wie z. B. für Interkontinentalflüge nicht zielführend ist.

Quelle Globusbild: https://en.wikipedia.org/wiki/Latitude

Recherche

5.42. Mathematische Informationen in Nachschlagewerken, dem Internet oder anderen Ressourcen recherchieren (inkl. kritischer Einschätzung der Quellen)

Recherchieren Sie im Internet/in einem Buch/..., welche Lösungen für die Gleichung $0^0 = x$ vorgeschlagen werden. Stellen Sie das Problem und Lösungsansätze dar.

Teil II.

Lösungen

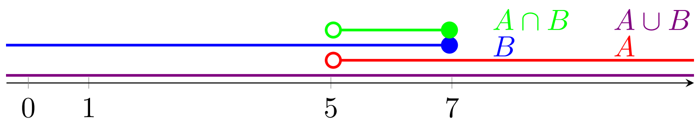
1. Mathematische Inhalte: Grundlagen

Mengen und Zahlen

1.1. Mengen, Mengendarstellungen und Mengenoperationen

a) (i) Die Zahl x ist entweder gleich b oder d.
(ii) Die Zahl x ist entweder 0 oder 1,5 oder eine reelle Zahl zwischen diesen beiden Zahlen.
(iii) Die Zahl x ist eine reelle Zahl, aber nicht 0 und nicht 2.
(iv) Die Zahl x ist eine reelle Zahl, die kleiner als -1 oder größer als 1 ist.

b)



c) (i) $s \in [5;\, 7\,]$
(ii) $5 \notin \{2;\, 4;\, 6;\, 8\}$
(iii) $\mathbb{D}_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 1\}$
(iv) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

1.2. Rationale, reelle Zahlen (inkl. elementarer Eigenschaften)

a) z. B. 1,05; 1,08; 1,10; 1,15; 1,20

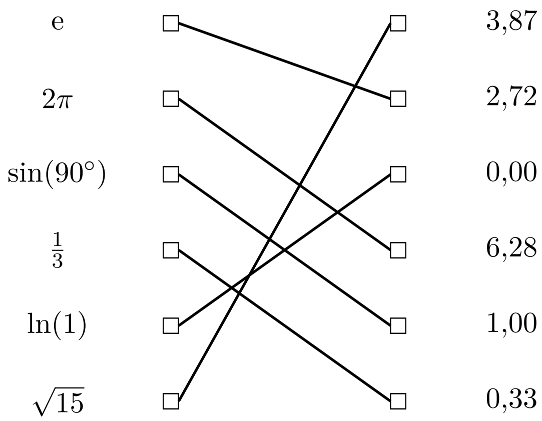
b) z. B. $\frac{81}{104}$; $\frac{82}{104}$; $\frac{83}{104}$; $\frac{84}{104}$; $\frac{85}{104}$

c) z. B. $\sqrt{2}$; π; 2π; e; ln(2)

d)

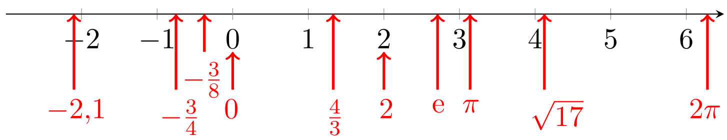
	$\mathbb{R}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N}$
2	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
$\frac{3}{4}$	$\times$	$\times$		
$\sqrt{5}$	$\times$			
-7	$\times$	$\times$	$\times$	
0	$\times$	$\times$	$\times$	
$\pi + 1$	$\times$			

1.3. Größenvorstellungen zu Standardbeispielen reeller Zahlen



1.4. Zahlengerade als Repräsentationsform für Zahlen

a)



b)

	$\{2;4\}$	$[2;4]$
1	☐	☐
2	☒	☒
2,1	☐	☒
3	☐	☒

1.5. Technik für Zahlenvergleiche

a)
$$900 = 30^2 \leq (31)^2 \leq (40)^2 = 1600$$

oder

$$31^2 = (30+1)^2 = 30^2 + 60 + 1 = 961$$

b) Sei m das kleinste gemeinsame Vielfache der jeweiligen Nenner der vorliegenden Brüche. Wir erweitern die Brüche mit passenden natürlichen Zahlen, sodass die resultierenden Nenner gleich m sind. Somit können wir leicht erkennen, welcher Bruch kleiner und welcher größer als der jeweils andere ist.

(i) $\frac{8}{15} = \frac{24}{45} < \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$

(ii) $\frac{5}{16} = \frac{75}{240} > \frac{64}{240} = \frac{4}{15}$

c) (i) $4 = 2^2 = \left(\frac{82}{41}\right)^2 < \left(\frac{99}{41}\right)^2 < \left(\frac{123}{41}\right)^2 = 3^2 = 9$

(ii) $12 = \sqrt{144} < \sqrt{150} < \sqrt{169} = 13$

1.6. Teilbarkeit einschließlich ggT, kgV und Primfaktorzerlegung

a) Die letzte Stelle der Zahl 6006 ist gerade, also ist 6006 durch 2 teilbar.
Die Quersumme von 6006 ist durch 3 teilbar, also ist 6006 durch 3 teilbar.
Die Quersumme von 6006 ist nicht durch 9 teilbar, also ist 6006 nicht durch 9 teilbar.
Die letzte Stelle der Zahl 6006 ist weder 0 noch 5, also ist 6006 nicht durch 5 teilbar.

b) $\frac{3}{8} + \frac{7}{12} = \frac{9}{24} + \frac{14}{24} = \frac{23}{24}$

c) $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$
$143 = 11 \cdot 13$
$\Rightarrow \text{ggT}(117; 143) = 13$
$\Rightarrow \text{kgV}(117; 143) = 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 1287$

d) $\frac{117}{143} = \frac{9 \cdot 13}{11 \cdot 13} = \frac{9}{11}$

1.7. Rechnen mit Maßeinheiten

a) (i) $6{,}7\,\mathrm{t} - 34\,\mathrm{kg} - 12\,000\,\mathrm{g}$
$= 6700\,\mathrm{kg} - 34\,\mathrm{kg} - 12\,\mathrm{kg}$
$= 6654\,\mathrm{kg}$

(ii) $24\,\mathrm{m} \cdot 7\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{dm} \cdot 6\,\mathrm{cm}$
$= 2400\,\mathrm{cm} \cdot 7\,\mathrm{cm} + 40\,\mathrm{cm} \cdot 6\,\mathrm{cm}$
$= 16\,800\,\mathrm{cm}^2 + 240\,\mathrm{cm}^2$
$= 17\,040\,\mathrm{cm}^2$

(iii) $6000\,\mathrm{cm}^3 + 5\,\ell$
$= 6\,\ell + 5\,\ell$
$= 11\,\ell$

b)

$$30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 30 \cdot \frac{1000}{3600}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8\frac{1}{3}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 8{,}33\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

1.8. Komplexe Zahlen (inkl. elementarer Eigenschaften)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

Variablen und Terme

1.9. Elementare algebraische Regeln

a) (i) $a - 3a^2b - 4a^5$
$= a\left(1 - 3ab - 4a^4\right)$

(ii) $\mathrm{e}^x x^2 - 3x \cdot \mathrm{e}^x$
$= (x-3) \cdot x \cdot \mathrm{e}^x$

b) (i) $3(x+3)^2 - 2x(x-1) - (x-4)^2$
$= 3x^2 + 18x + 27 - 2x^2 + 2x - x^2 + 8x - 16$
$= 28x + 11$

(ii) $-\left(-\left(b + c - (5 - (+3))\right)\right)$
$= +b + c - 5 + 3$
$= b + c - 2$

(iii) $\dfrac{4 \cdot a \cdot b + 6 \cdot a}{2 \cdot (b+1) + 1}$
$= \dfrac{2a\,(2b+3)}{2b+3}$
$= 2a$

(iv) $3ab - \left(b\,(a-2) + 4b\right)$
$= 3ab - (ba - 2b + 4b)$
$= 2b\,(a-1)$

(v) $\left(\dfrac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^3}\right)^3 : \left(\dfrac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4$
$= \dfrac{a^6 \cdot b^3 \cdot c^8 \cdot d^8}{c^3 \cdot d^9 \cdot a^4 \cdot b^8}$
$= \dfrac{a^2 \cdot c^5}{b^5 \cdot d}$

1.10. Bruchrechnung und Umgang mit Bruchtermen

a)

$$\frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{1}{x+1} + \frac{(x-1)\,(x+1)}{x+1} = \frac{1 + x^2 - 1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

b)

$$\frac{\frac{3 \cdot 4}{7}}{\frac{16}{21}} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 21}{7 \cdot 16} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 4} = \frac{9}{4}$$

1.11. Prozentrechnung, Proportionalität und Dreisatz

a) $0{,}3 \cdot 360° = 108°$

b) In eineinhalb Tagen würden drei Hühner doppelt so viele Eier legen wie eineinhalb Hühner, also drei Eier legen. Ein Huhn würde in dieser Zeit den dritten Teil, das ist ein Ei, legen. Also würden sieben Hühner in eineinhalb Tagen sieben Eier legen. Da sechs Tage viermal so viel sind wie eineinhalb Tage, würden folglich die sieben Hühner in sechs Tagen genau 28 Eier legen.

c) Es gilt $20\,\mathrm{g} \cdot \frac{2\,\mathrm{g}}{18\,\mathrm{g}} \approx 2{,}2\,\mathrm{g}$. Somit werden ca. $2{,}2\,\mathrm{g}$ H_2 benötigt.

Es gilt $20\,\mathrm{g} \cdot \frac{\frac{32\,\mathrm{g}}{2}}{18\,\mathrm{g}} \approx 17{,}8\,\mathrm{g}$. Somit werden ca. $17{,}8\,\mathrm{g}$ O_2 benötigt.

d) Die Wirkstoffmenge in der ersten Lösung beträgt $2\,\mathrm{m}\ell$. Die Wirkstoffmenge in der zweiten Lösung beträgt $6\,\mathrm{m}\ell$. Somit kommen wir insgesamt auf eine Wirkstoffmenge von $8\,\mathrm{m}\ell$ in $500\,\mathrm{m}\ell$ Lösung. Die Mischung hat also einen Wirkstoffanteil von $\frac{8\,\mathrm{m}\ell}{500\,\mathrm{m}\ell} = 1{,}6\,\%$.

e) Eine reelle Funktion f ist genau dann proportional, wenn...

	wahr	falsch
... $\frac{x}{f(x)} = c$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt.	☒	☐
... $f(x) = m \cdot x + b$ mit $m,\, b > 0$ gilt.	☐	☒
... der Graph von f eine Ursprungsgerade ist.	☒	☐
... der Graph von f die Winkelhalbierende des I. Quadranten ist.	☐	☒

(Un-)Gleichungen in einer Variablen und lineare Gleichungssysteme

1.12. Äquivalenzumformung und Implikation

Nur zwischen den Zeilen $(x+2)^2 = 9$ und $(x+2) = \sqrt{9}$ liegt keine Äquivalenzumformung vor. Die Zeile $(x+2)^2 = 9$ ist äquivalent zu

$$x + 2 = +\sqrt{9} = +3 \quad \text{oder} \quad x + 2 = -\sqrt{9} = -3.$$

(Ausblick: An der Hochschule schreibt man in einem solchen Fall

$$(x+2)^2 = 9 \quad \Leftarrow \quad x + 2 = \sqrt{9}.)$$

1.13. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Gilt $a < 0$, dann hat die Gleichung $(x+2)^2 = a$ keine reelle Lösung, da die Wurzel einer negativen Zahl in $\mathbb{R}$ nicht definiert ist.
Gilt $a = 0$, dann gilt:

$$(x+2)^2 = 0 \iff x+2 = 0 \iff x = -2.$$

Somit hat diese Gleichung genau eine reelle Lösung.
Gilt $a > 0$, so folgt:

$$\begin{aligned} (x+2)^2 = a \iff & \quad x+2 = \sqrt{a} \quad \text{oder} \quad x+2 = -\sqrt{a} \\ \iff & \quad x = -2+\sqrt{a} \quad \text{oder} \quad x = -2-\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Somit besitzt diese Gleichung zwei Lösungen.

1.14. Lineare und quadratische Gleichungen

a) (i) Es gilt:
$0 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$
Dann ist $\mathbb{L}_x = \{-1\}$.

(ii) Es gilt:
$0 = x^2 - 5x + 6 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ oder $x = 3$.
Dann ist $\mathbb{L}_x = \{2; 3\}$.

(iii) Es gilt:
$0 = x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow (x-2)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = -1.$
Dann ist $\mathbb{L}_x = \emptyset$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} & 0 = x^2 + 4x + 2a \\ \iff & 4 - 2a = (x+2)^2 \\ \iff & x = -2 - \sqrt{4-2a} \text{ oder } x = -2 + \sqrt{4-2a}. \end{aligned}$$

Somit besitzt die Gleichung für $a \leq 2$ mindestens eine Lösung.

c) Beide Tarife lassen sich mittels Funktionen beschreiben, welche jeweils den Gesamtpreis in Abhängigkeit der Fahrminuten angeben. Für Tarif A definieren wir die reelle Funktion f mit $f(x) = 9x + 1000$ und für Tarif B definieren wir die reelle Funktion g mit $g(x) = 19x$. Es gilt $g(0) < f(0)$. Wir suchen also den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen. Es gilt:

$$g(x) = f(x) \iff 19x = 9x + 1000 \iff x = 100$$

Es gilt also $f(101) < g(101)$, also ist Tarif A ab 101 Fahrminuten günstiger.

1.15. Potenz- und Wurzelgleichungen (inkl. Rechenregeln)

a) (i) $3^{18} : 3^{16} = 3^{18-16} = 3^2 = 9$

(ii) $2^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^6 : 2^5 = 2^{6-5} = 2^1 = 2$

(iii) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[2]{9} = 3$

(iv) $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$

b) (i) $x^{-2} = 3 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$

(ii) $\sqrt{\sqrt{16}} = 2x \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2x \Leftrightarrow 2 = 2x \Leftrightarrow x = 1$

(iii)

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{3x} + \sqrt{27x}\right)^2 &= 24 \\ \Leftrightarrow 3x + 2 \cdot \sqrt{3x \cdot 27x} + 27x &= 24 \\ \Leftrightarrow \qquad 30x + 2 \cdot \sqrt{81x^2} &= 24 \\ \Leftrightarrow \qquad 30x + 2 \cdot 9x &= 24 \\ \Leftrightarrow \qquad 48x &= 24 \\ \Leftrightarrow \qquad x &= \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(iv) $\sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2^3 = 8$

(v) $2^x = 1024 \Leftrightarrow x = \log_2(1024) = 10$

(vi) $x^3 = 27 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$

(vii) $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt{4} = 2 \vee x = -\sqrt{4} = -2$

c) $2^{-n} < 0{,}01 \Leftrightarrow -n < \log_2(0{,}01) \approx -6{,}644$
Also gilt die Ungleichung für alle $n \geq 7$.

d) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{3n} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{3n} = 5^{\frac{3n}{3}} = 5^n$

1.16. Betragsgleichungen

a) Es gilt:

$$\begin{aligned}|x-3|=2 &\Leftrightarrow x-3=2 \text{ oder } x-3=-2\\ &\Leftrightarrow x=3+2 \text{ oder } x=3-2\\ &\Leftrightarrow x=5 \text{ oder } x=1\end{aligned}$$

Dann ist $\mathbb{L}_x=\{1;\,5\}$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned}|2x-3|=5 &\Leftrightarrow 2x-3=5 \text{ oder } 2x-3=-5\\ &\Leftrightarrow x=\frac{3+5}{2} \text{ oder } x=\frac{3-5}{2}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{8}{2}=4 \text{ oder } x=\frac{-2}{2}=-1\end{aligned}$$

Dann ist $\mathbb{L}_x=\{-1;\,4\}$.

1.17. Exponential- und Logarithmusgleichungen

a)

$$\begin{aligned}&(x^2-4)\mathrm{e}^{0,5x}=0\\ \Leftrightarrow\ &(x-2)(x+2)\mathrm{e}^{0,5x}=0\\ \Leftrightarrow\ &x=2 \text{ oder } x=-2\end{aligned}$$

Dann ist $\mathbb{L}_x=\{-2;2\}$.

b)

$$\begin{aligned}&\ln(2x-3)=0\\ \Leftrightarrow\quad &2x-3=1\\ \Leftrightarrow\quad &x=2\end{aligned}$$

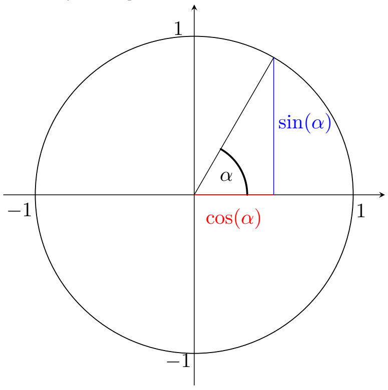
Dann ist $\mathbb{L}_x=\{2\}$.

c) $\mathbb{L}_x=\{\ln(2)\}$

1.18. Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen

a) $\mathbb{L}_x = \{0; \pi; 2\pi\}$

b) Mit dem Satz des Pythagoras für rechtwinklige Dreiecke gilt $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1^2 = 1$.



c) i) Es gilt $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Daher ist der Ausdruck für $\cos(x) = 0$ nicht definiert und es folgt $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \,|k \in \mathbb{Z}\}$.

ii) $1 + \tan^2(x) = 1 + \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

1.19. Lineare und quadratische Ungleichungen

a) Es gilt:

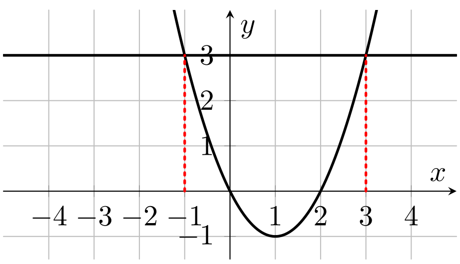
$$3x - 7 > 2 + 5x \Leftrightarrow -2x - 7 > 2 \Leftrightarrow -2x > 9 \Leftrightarrow x < -\frac{9}{2}$$

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 &\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \text{ oder } x = 3 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass $x = -1$ oder $x = 3$ die Unleichung nicht erfüllt. Durch Einsetzen von beispielsweise 5 bzw. 0 erkennt man, dass die Ungleichung für alle $-1 < x < 3$ gilt.

Oder:



Gezeichnet sind die reellen Funktionen f mit $f(x) = 3$ und g mit $g(x) = x^2 - 2x$. Man erkennt, dass $g(x) < f(x)$ für alle x aus dem Intervall $]-1; 3[$ gilt.

c) (i) $x \in]-2; 2[$

(ii) $x \in]-\infty; -2]$ und $x \in [2; \infty[$

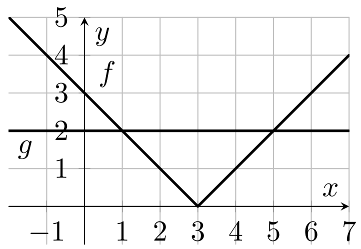
1.20. Ungleichungen mit Beträgen

a) (i) Wir unterscheiden:

(I) Ist $x \geq 3$, so gilt $x - 3 = |x - 3| < 2$, also $x < 5$.

(II) Ist $x < 3$, so gilt $-(x - 3) = |x - 3| < 2$, also $x > 1$.

Zusammengenommen ist $\mathbb{L}_x =]1; 5[$.
Sei f eine reelle Funktion mit $f(x) = |x - 3|$ und g eine reelle Funktion mit $g(x) = 2$, so erhält man die folgende Skizze:



Man sieht, dass die Ungleichung (wie oben berechnet) für $x \in]1; 5[$ gilt.

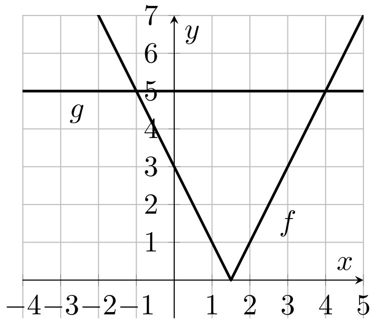
(ii) Wir unterscheiden:

(I) Ist $x \geq 1{,}5$, so gilt $2x - 3 = |2x - 3| > 5$, also $x > 4$.

(II) Ist $x < 1{,}5$, so gilt $-(2x - 3) = |2x - 3| > 5$, also $x < -1$.

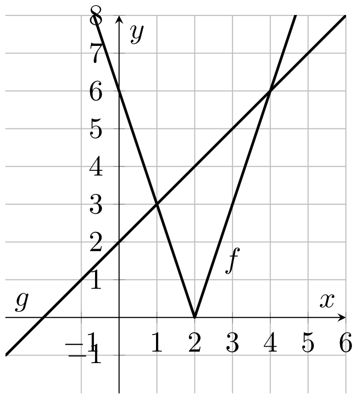
Zusammengenommen ist $\mathbb{L}_x =]-\infty; -1[\ \bigcup \ ]4; \infty[$.

Sei f eine reelle Funktion mit $f(x) = |2x - 3|$ und g eine reelle Funktion mit $g(x) = 5$, so erhält man die Skizze:



Man sieht, dass die Ungleichung (wie oben berechnet) für $x \in]-\infty; -1[$ und $x \in]4; \infty[$ gilt.

b) Sei f eine reelle Funktion mit $f(x) = |3x - 6|$ und g eine Funktion mit $g(x) = x + 2$, so erhält man die Skizze:



Wir sehen, dass für $x \in [1; 4]$ gilt $f(x) \leq g(x)$, also $|3x - 6| \leq x + 2$.

1.21. Lineare Gleichungssysteme mit bis zu drei Unbekannten (ohne Matrixdarstellung)

a)

Gleichungssystem	linear	nicht linear
(i) $\begin{array}{ll} \text{I} & x+\ \ y=1 \\ \text{II} & y-\ \ 2=x \end{array}$	$\times$	
(ii) $\begin{array}{ll} \text{I} & x\cdot y=5 \\ \text{II} & 2x+3y=7 \end{array}$		$\times$
(iii) $\begin{array}{ll} \text{I} & a^2x+1=7 \\ \text{II} & 3x-y=5 \end{array}$	$\times$	

b) Wir setzen die Gleichung II in die Gleichung I ein. Somit erhalten wir:

$$x+y=1 \quad \Rightarrow \quad y-2+y=1 \quad \Rightarrow \quad 2y=3 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3}{2}.$$

Setzen wir diesen Wert in die erste Gleichung ein, dann erhalten wir

$$x+y=1 \quad \Rightarrow \quad x+\frac{3}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}.$$

1.22. Lineare Gleichungssysteme: Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen (ohne Matrixdarstellung)

Mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus erhält man:

$$\begin{aligned} x+3y+2z&=1 \\ -2y&=0 \\ -4y&=1 \end{aligned}$$

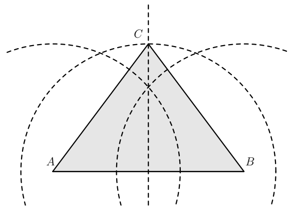
Das heißt, das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Elementare Geometrie

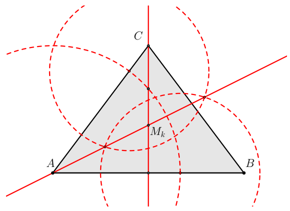
1.23. Geometrische Konstruktionen von Dreiecken bzw. im Dreieck

a) Zeichne eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge 12 cm als Basis des zu konstruierenden Dreiecks. Schlage um den Punkt A einen Kreis, dessen Radius mindestens die Hälfte der Länge der Stecke $\overline{AB}$, hier also mindestens 6 cm, beträgt.

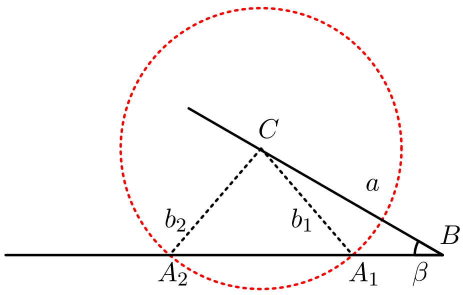
Schlage um den Punkt B einen Kreis, der denselben Radius hat. Die beiden Schnittpunkte dieser Kreise liegen auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$. Zeichne diese Mittelsenkrechte ein. Schlage nun einen Kreis mit dem Radius 8 cm um den Schnittpunkt der Mittelsenkrechten mit der Strecke $\overline{AB}$. Wähle einen der beiden Schnittpunkte dieses Kreises mit der Mittelsenkrechten als Punkt C aus. Um ein weiteres Dreieck mit den geforderten Eigenschaften zu erhalten, wähle den anderen Schnittpunkt des Kreises mit der Mittelsenkrechten als Punkt C'. Weitere mögliche Dreiecke existieren nicht.



b) Der Inkreismittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden. Die Mittelsenkrechte auf der Basis $\overline{AB}$ eines gleichschenkligen Dreiecks ABC fällt zusammen mit der Winkelhalbierenden des Innenwinkels des Dreiecks am Punkt C.
Eine zweite Winkelhalbierende lässt sich konstruieren, indem man einen Kreis um Punkt A schlägt, dessen Radius maximal der Länge der kürzeren der beiden von Punkt A ausgehenden Seiten das Dreiecks entspricht. Der Kreis schneidet dann diese beiden Seiten.Um jeden der beiden so entstandenen Schnittpunkte schlägt man nun einen Kreis mit demselben Radius, der so groß zu wählen ist, dass diese beiden Kreise sich schneiden. Die Gerade durch den Punkt A und die Schnittpunkte dieser beiden Kreise ist die Winkelhalbierende des Innenwinkels am Punkt A.
Der Schnittpunkt der so konstruierten Winkelhalbierenden ergibt den gesuchten Inkreismittelpunkt M_k.



c) Zunächst konstruiere man den Winkel β. Mittels Zirkelschlag um B der Länge a erhalten wir den Punkt C. Mit erneutem Zirkelschlag um C der Länge b erhalten wir die beiden möglichen Punkte A_1 und A_2. Insgesamt erhalten wir also zwei mögliche Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften.



1.24. Satz des Pythagoras und Sätze am Kreis (z. B. Satz des Thales)

a) (i) Wird der Durchmesser eines Kreises durch einen weiteren Punkt auf der Kreislinie zu einem Dreieck ergänzt, so hat das Dreieck in diesem neuen Punkt einen rechten Winkel.
Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:
Ist ein Dreieck rechtwinklig, so ist die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite der Durchmesser des Umkreises dieses Dreiecks.

(ii) In jedem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates.
Es gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:
Entspricht in einem Dreieck die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über zwei Seiten dem Quadrat über der dritten Seite, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, wobei der rechte Winkel von den beiden Seiten eingeschlossen ist.

b) Es gilt:

$$(10\,\mathrm{cm})^2 + (12\,\mathrm{cm})^2 = 244\,\mathrm{cm}^2 \neq 225\,\mathrm{cm}^2 = (15\,\mathrm{cm})^2.$$

Somit ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

1.25. Trigonometrie (inkl. Sinus- und Kosinussatz)

a)

$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$	$\times$
$\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$	
$\tan(\beta) = \frac{a}{b}$	
$\cos(\beta) = \frac{a}{c}$	$\times$

b) Betrachte ein Dreieck mit Katheten a und b, Hypotenuse c und rechtem Winkel bei γ. Aus dem Kosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

erhält man durch Einsetzten von $\gamma = 90°$ und wegen $\cos(90°) = 0$ den Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

c) Mit dem Kosinussatz gilt:

$$\begin{aligned} & b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \\ \Rightarrow\quad & \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ \Rightarrow\quad & \beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha \\ \Rightarrow\quad & \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \Rightarrow\quad & \alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma \\ \Rightarrow\quad & \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ \Rightarrow\quad & \gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \end{aligned}$$

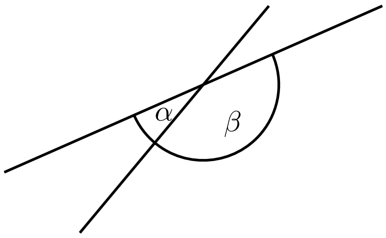
Alternativ kann man nach der Berechnung von β (wie oben mithilfe des Kosinussatzes) auch den Sinussatz nutzen, um α und γ zu bestimmen:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sin\beta \cdot a}{b} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{\sin\beta \cdot a}{b}$$

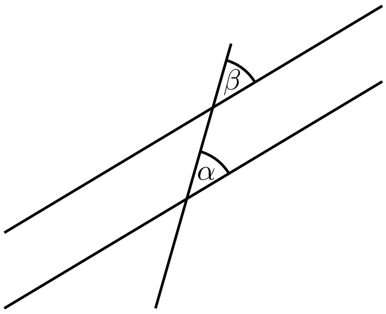
$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \Rightarrow \sin\gamma = \frac{\sin\beta \cdot c}{b} \Rightarrow \gamma = \arcsin\frac{\sin\beta \cdot c}{b}$$

1.26. Berechnung von Winkelgrößen, Längen und Flächeninhalten bzw. Volumina bei einfachen Flächen- bzw. Körperformen (z. B. Dreieck, Viereckstypen, Kreis, Pyramiden, Zylinder, Kugel)

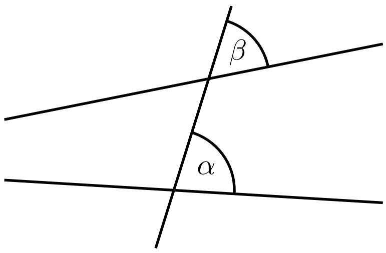
a) (i) Die Aussage ist stets korrekt, weil die Summe der Winkel einen gestreckten Winkel $\alpha + \beta = 180°$ ergeben.



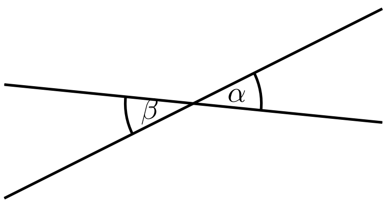
(ii) Die Aussage ist nur für Winkel an parallelen Geraden korrekt,



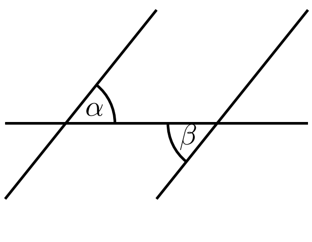
sonst nicht.



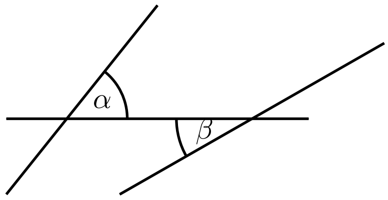
(iii) Die Aussage ist stets korrekt wegen der Punktsymmetrie.



(iv) Die Aussage ist nur für Winkel an parallelen Geraden korrekt,



sonst nicht.



b) Es sei A die Oberfläche, V das Volumen, r der Radius und h die Höhe des Zylinders. Dann gilt:
$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 8\pi\text{cm}^2 + 32\pi\text{cm}^2 = 40\pi\text{cm}^2$
$V = \pi r^2 h = 32\pi\text{cm}^3$.
Somit beträgt der Oberflächeninhalt des Zylinders $40\pi\text{cm}^2$, was ungefähr $125{,}66\,\text{cm}^2$ sind, und das Volumen beträgt $32\pi\text{cm}^3$, was ungefähr $100{,}53\,\text{cm}^3$ sind.

c) Es sei V das Volumen, a die Länge der Grundseite und h die Höhe der Pyramide. Dann gilt:

$$V = \frac{a^2h}{3} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{3V}{h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 60}{6}\,\text{cm}^2} = \sqrt{30}\,\text{cm}.$$

Somit ist die Grundseite ungefähr $5{,}477\,\text{cm}$ lang und der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $30\,\text{cm}^2$.

d) Der erzeugte Rotationskörper ist ein Kegel. Es sei V dessen Volumen, h dessen Höhe und r dessen Radius. Dabei ist r die halbe Seitenlänge und h die Höhe des Dreiecks. Also ist $r = 5$ und mit Hilfe des Satzes des Pythagoras berechnen wir die Höhe, nämlich

$$h = \sqrt{(100 - 25)\,\text{cm}^2} = 5 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}.$$

Es gilt

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 5^2 \cdot 5\sqrt{3}\,\text{cm}^3 = \frac{125 \cdot \sqrt{3}}{3}\pi\,\text{cm}^3.$$

Somit beträgt das Volumen des Rotationskörpers $\frac{125\cdot\sqrt{3}}{3}\pi\,\text{cm}^3$, was ungefähr $226{,}725\,\text{cm}^3$ sind.

e) Es gilt im rechtwinkligen Dreieck

$$\sin(\alpha) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{3}{4}\right) \approx 48{,}59°.$$

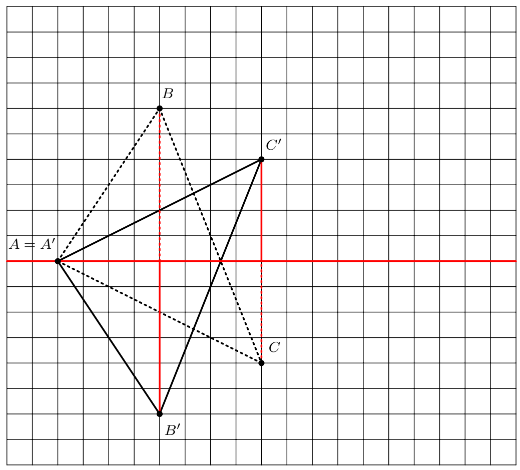
Also schließt die Leiter mit dem Boden einen Winkel von ca. 48,59° ein.

1.27. Kongruenz und Ähnlichkeit (und zugehörige Abbildungen)

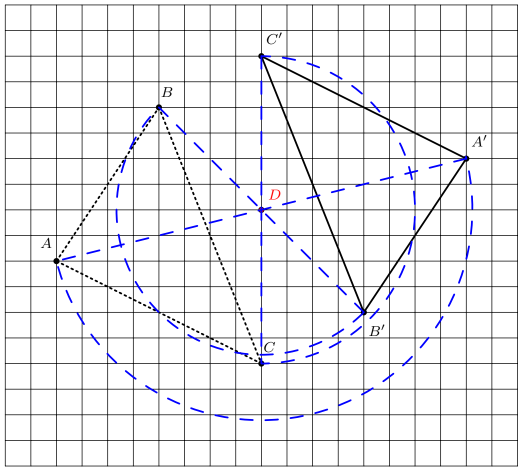
a) Die Aussage (i) ist wahr.

b)

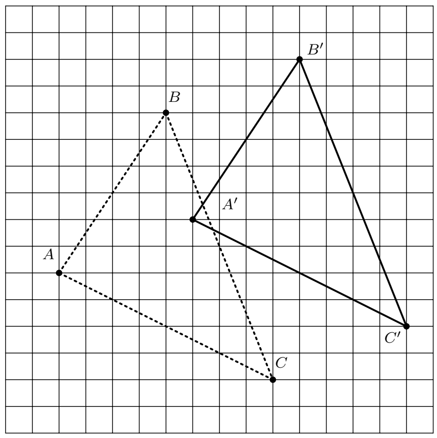
(i)



(ii)

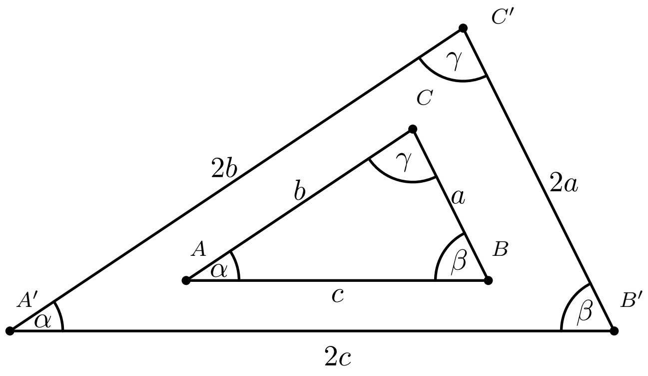


(iii)



c) SSS: Zwei Dreiecke, die in ihren drei Seitenlängen übereinstimmen, sind kongruent.
SWS: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, sind kongruent.
WSW: Zwei Dreiecke, die in einer Seitenlänge und in den dieser Seite anliegenden Winkeln übereinstimmen, sind kongruent.
SsW: Zwei Dreiecke, die in zwei Seitenlängen und in jenem Winkel übereinstimmen, der der längeren Seite gegenüberliegt, sind kongruent.

d) Bei dem neuen Dreieck $A'B'C'$ sind im Vergleich zum ursprünglichen Dreieck ABC die Seitenlängen doppelt so lang, die Winkel gleich groß und der Flächeninhalt viermal so groß:



$$\begin{aligned} A_{A'B'C'} &= 2a \cdot 2b \cdot \sin(\gamma) \\ &= 4 \cdot ab \cdot \sin(\gamma) \\ &= 4 \cdot A_{ABC} \end{aligned}$$

1.28. Strahlensätze

	richtig	falsch
$\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$	☐	☒
$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$	☒	☐
$\frac{b}{e} = \frac{d}{f}$	☒	☐
$\frac{e}{f} = \frac{a}{c}$	☒	☐

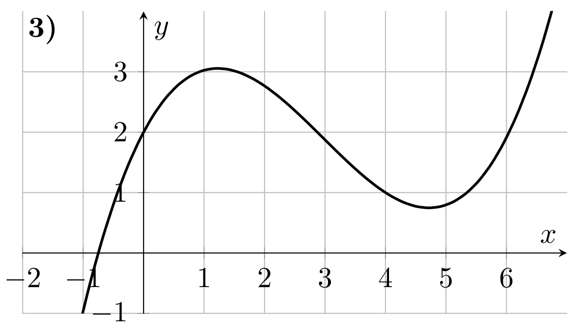
1.29. Kreisgleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

Funktionen

1.30. Begriff/Definition einer Funktion

Eine Funktion ordnet jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element des Wertebereiches zu. Also stellt nur der folgende Graph eine Funktion dar:



1.31. Definitionsmenge und Wertemenge

a) Die Wertemenge ist $\mathbb{W} = [-1; \infty[$.

b) Alle negativen Zahlen z. B. -1 oder -100 sind Werte, die in die Funktion nicht eingesetzt werden dürfen.

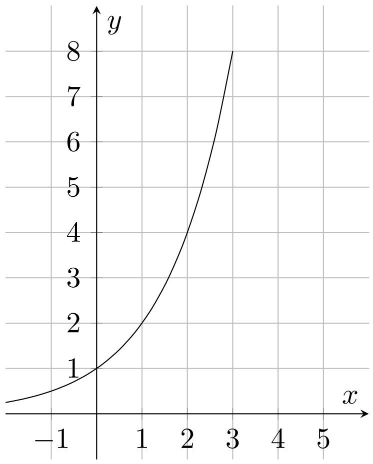
c) (i) Alle Zahlen zwischen -1 und 1, z. B. $-\frac{1}{2}$ oder 0 oder $\frac{1}{2}$ (aber nicht -1 oder 1 selbst) sind Werte, in denen $f(x)$ nicht definiert ist.

(ii) Die größtmögliche Definitionsmenge ist $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus\,]-1; 1[$.

1.32. Repräsentation von Funktionen (Tabelle, Graph, Gleichung)

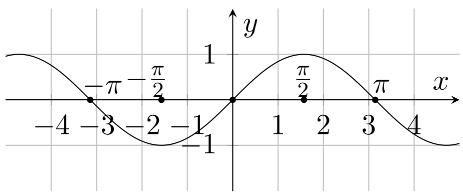
a) $f(x) = 2^x$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



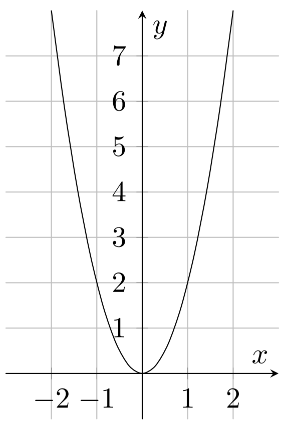
b) $g(x) = \sin(x)$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g(x)$	0	-1	0	1	0



c) $h(x) = 2x^2$

x	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
$h(x)$	8	$4{,}5$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2	$4{,}5$	8



1.33. Transformation von Funktionen (Spiegelung, Verschiebung, Streckung/Stauchung) an Funktionsgraph und -gleichung

a) $g(x) = (x-3)^2 - 2$

b) Folgende Transformationen liefern die Funktionen $g_1, \ldots, g_4$:

		$g_1(x) = f(x)+3$	$g_2(x) = f(-2x)$	$g_3(x) = \frac{1}{2}f(x) - 5$	$g_4(x) = -3f(x+4)$
Stauchung	in x-Richtung		$\times$		
	in y-Richtung			$\times$	
Streckung	in x-Richtung				
	in y-Richtung				$\times$
Spiegelung	an x-Achse				$\times$
	an y-Achse		$\times$		
Verschiebung nach	oben	$\times$			
	unten			$\times$	
	rechts				
	links				$\times$

1.34. Lineare und quadratische Funktionen

a) Für $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ gelten: $f(0) = 2$, $f(2) = 3$, $f(6) = 5$. Also könnten die Messpunkte einem linearen Zusammenhang unterliegen.

b) $f(x) = x^2 - 1$.

1.35. Potenz- und Wurzelfunktion

a) Die Aussage ist wahr.
Begründung: Wenn $n \in \mathbb{N}$ gerade ist, gilt $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Damit folgt

$$f(-1) = (-1)^n = (-1)^{2m} = ((-1)^2)^m = (1)^m = 1.$$

b) (i) Die Überlegung

$$3x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

liefert die Definitionsmenge $\mathbb{D} = [2; \infty[$.

(ii) Die Wertemenge ist $\mathbb{W} = [0; \infty[$.

(iii) Für die Nullstellen von g muss gelten:

$$\begin{aligned} & \sqrt{3x-6} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x &= 2. \end{aligned}$$

Also gibt es genau eine Nullstelle bei $x = 2$.

1.36. Exponential- und Logarithmusfunktionen

	Graph						
Funktionsterm	1	2	3	4	5	6	7
e^x		$\times$					
e^{2x}	$\times$						
e^{-x}			$\times$				
$-e^x$				$\times$			
$\ln(x)$					$\times$		
$2\ln(x)$							$\times$
$\ln(x)+1$						$\times$	

1.37. Trigonometrische Funktionen (inkl. Bogenmaß, Kenntnisse spezieller Funktionswerte, Polarkoordinaten)

a) $\boxed{\text{D}}$ bzw. $\boxed{\text{Deg}}$

b) (i) $b = \dfrac{a}{\tan\alpha}$

(ii) $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{a}{c}\right)$

c) $\alpha = \arccos\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) = 135°$,

$d = \dfrac{60°}{360°} \cdot 2\pi = \dfrac{\pi}{3}$,

$c = \sin(60°) = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$

d)

	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	nicht definiert

e) z. B. $f(x) = -2\sin(2x) + 2$

1.38. Verkettung von Funktionen

a) $g(f(x)) = \sin^2(x) + 2\sin(x)$

Anmerkung: $\sin^2(x) = (\sin(x))^2$

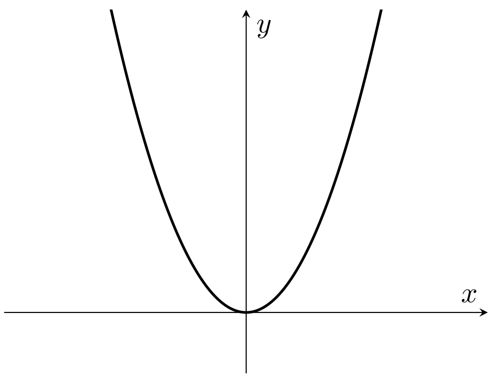
b) $f(g(x)) = \sin(x^2 + 2x)$

1.39. Symmetrie

a)

Funktion f mit der folgenden Eigenschaft für alle $x \in \mathbb{R}$	achsen-symmetrisch (zur y-Achse)	punkt-symmetrisch (zum Ursprung)	keine Aussage möglich
$f(x) = f(-x)$	$\times$		
$f(x) = -f(-x)$		$\times$	
$f(x) = a$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\times$		
$f(ax) = af(x)$ für ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$			$\times$

b) Skizziert werden muss der Graph einer Funktion, der symmetrisch zur y-Achse verläuft, also z. B. eine Normalparabel.



1.40. Monotonie

a) Die Aussage ist falsch. Ein mögliches Gegenbeispiel ist die Funktion f mit $f(x) = 2$. Für sie gilt auf jedem Intervall $f'(x) \geq 0$, aber f ist nicht streng monoton steigend.

b) Die Aussage ist wahr.

c) Die Aussage ist wahr.

d) Die Aussage ist falsch. Ein mögliches Gegenbeispiel ist die Funktion f mit $f(x) = 42$. Sie ist monoton fallend, aber nicht streng monoton fallend.

e) Die Aussage ist falsch. Ein mögliches Gegenbeispiel ist die Funktion f mit $f(x) = x^3$. Sie ist streng monoton steigend, aber $f'(0) = 0$.

1.41. Nullstellen

a) (i) z. B. $f(x) = x + 1$
   (ii) z. B. $f(x) = x^2 - 1$
   (iii) z. B. $f(x) = x(x-1)(x-2)$
   (iv) z. B. $f(x) = x^2 + 1$ oder $f(x) = 1$
   (v) z. B. $f(x) = 0$ oder $f(x) = \sin(x)$

b) Gesucht ist x mit $f(x) = x(x^2 - 2x + 1) = 0$.
Die Gleichung ist erfüllt, falls $x = 0$ oder $(x^2 - 2x + 1) = 0$.
Als erste mögliche Lösung erhält man also $x_1 = 0$.
Es gilt ferner $(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^2 = 0$ genau dann, wenn $x = 1$. Also ist $x_2 = x_3 = 1$ eine weitere Nullstelle von f. Weitere Nullstellen gibt es nicht.

c) $f(x) = (x+3)(x+1)(x-2)$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f(x) = x^2 - 2x + a \\ \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{1-a} \quad &\text{oder} \quad x = 1 - \sqrt{1-a}. \end{aligned}$$

Also existieren genau dann zwei Nullstellen, wenn $a < 1$.

1.42. Asymptotisches Verhalten von Funktionen

a) Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$.
Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to -\infty$.
Es gibt also mindestens eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = 0$.

b) Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$.
Für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 0$.

1.43. Polynome (Grad n), elementares Rechnen mit Polynomen

a) $f(x) + g(x) = (3 + a)x^4 + 2x^2 + (5 + d)$

b) $f(x) \cdot g(x) = 3ax^8 + 2ax^6 + (5a + 3d)x^4 + 2dx^2 + 5d$

c) $f(x) - g(x) = (a - 3)x^4 - 2x^2 + (d - 5)$

1.44. Polynomdivision

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

1.45. Gebrochen-rationale Funktion

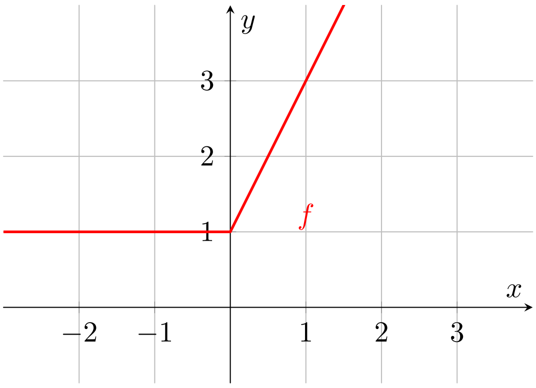
Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

1.46. Begriff der Umkehrfunktion inkl. zentraler Beispiele (Potenz-, Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktionen und trigonometrische Funktionen)

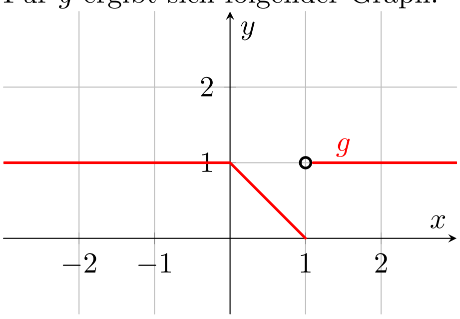
Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

1.47. Funktionen mit Fallunterscheidung

a) Für f ergibt sich folgender Graph:



Für g ergibt sich folgender Graph:



b)

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } -2 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.48. Funktionsscharen (Funktionen mit Parametern)

a) (i) Der Parameter a gibt an, ob die Parabel gestreckt ($|a| > 1$) oder gestaucht ($|a| < 1$) ist, und ob die Parabel nach oben ($a > 0$) oder nach unten ($a < 0$) geöffnet ist.
Der Parameter d gibt an, ob die Parabel nach links ($d < 0$) oder nach rechts ($d > 0$) verschoben ist.
Der Parameter e gibt an, ob die Parabel nach oben ($e > 0$) oder nach unten ($e < 0$) verschoben ist.

(ii) $d = -3$ und $e = 2$

b)

☐ $f(x) = x^2 + a$

☒ $f(x) = ax^2$

☐ $f(x) = x^{2a}$

☐ $f(x) = \frac{1}{a}x^2$

1.49. Funktionen mit mehreren Variablen

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

1.50. Bijektivität, Surjektivität und Injektivität (von Funktionen)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2. Mathematische Inhalte: Analysis

Folgen und Reihen

2.1. Propädeutisch mit Folgen umgehen

a) Eine Lösung ist z. B. $a_4 = 12,\ a_5 = 15,\ a_6 = 18,\ a_n = 3n$

Anmerkung: Die Eindeutigkeit der Lösung zu a) ist mathematisch nicht zwingend. Es existieren alternative Lösungen, die angegebene Lösung ist jedoch für viele Menschen die naheliegendste.

b) Es werden die ungeraden (natürlichen) Zahlen beschrieben: $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$.

2.2. Intuitives Grenzwertkonzept (z. B. $x \to a$, ohne expliziten Folgenbegriff) und Grenzwertbestimmung

a) Es gilt $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

b) $f(n)$ springt zwischen 1 und -1. (Deshalb existiert kein Grenzwert.)

2.3. Arithmetische und geometrische Folgen

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.4. Bildungsvorschrift von Folgen (rekursiv, explizit)

a) $a_n = 2^{n-1}$

b) $a_3 = 11$

2.5. Formales Grenzwertkonzept (auf Basis von Folgen) und Grenzwertbestimmung

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.6. Propädeutischer Umgang mit Reihendarstellungen (als Folge von Partialsummen)

a) Es gilt

$$\begin{aligned} s_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= (1^2+3) + (2^2+3) + (3^2+3) + (4^2+3) + (5^2+3) \\ &= 4 + 7 + 12 + 19 + 28 \\ &= 70. \end{aligned}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{100} k^2$$

Anmerkung: Das Summenzeichen wird als abkürzende Schreibweise nicht in allen Schulen eingeführt, aber an der Hochschule, ebenso wie das Produktzeichen Π als abkürzende Schreibweise für Produkte, viel genutzt.

2.7. Arithmetische und geometrische Reihe

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

Stetigkeit, Differential- und Integralrechnung (Riemann-Integral)

2.8. Anschauliches Stetigkeitskonzept (z. B. als „durchgezogener Graph“)

	stetig	nicht stetig
f	☐	☒
g	☒	☐
h	☒	☐

2.9. Formales Stetigkeitskonzept (z. B. als $\epsilon - \delta -$Definition oder mittels Idee der Folgenstetigkeit)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.10. Konzeptuelles Verständnis von Ableitung und Integral

a) (i) Man möchte den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und einer Funktion in einem Intervall näherungsweise bestimmen. Wir berechnen dazu den Flächeninhalt von Rechtecken, die einheitliche Breiten und jeweils einen Funktionswert als Höhe haben und summieren diese. Dies liefert eine grobe Näherung des Flächeninhalts.

(ii) Sei A der zu berechnende Flächeninhalt und f die dargestellte Funktion. Dann gilt: $A \approx 2(f(0) + f(2) + f(4) + f(6) + f(8))$.

(iii) Mögliche Verbesserungen sind zum Beispiel die Verwendung von Trapezen anstelle von Rechtecken oder die Verkleinerung der Breite der Rechtecke.

b) (i)

Δx	$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
6	6	1
2	1,2	0,6
1	0,5	0,5
0,1	0,041	0,41
0,01	0,00401	0,401
0,001	0,0004001	0,4001

(ii) Im Steigungsdreieck muss Δx gegen 0 gehen. Das betrachtete Intervall wird dadurch unendlich klein und wir erhalten die lokale Änderungsrate in x_0.

(iii) Wenn Δx gegen 0 strebt, strebt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gegen 0,4. Dieser Wert ist die Tangentensteigung des Graphen der Funktion f an der Stelle $x = 2$.

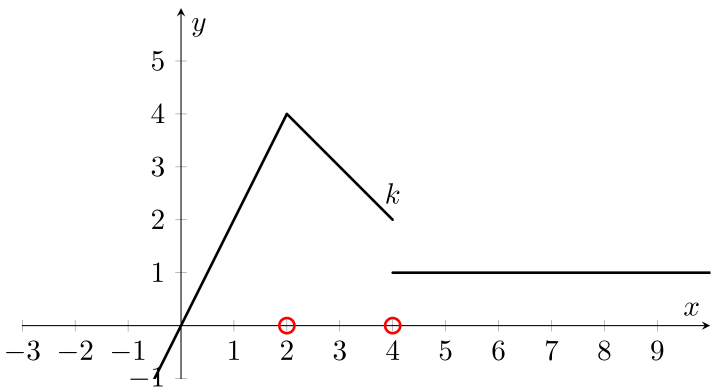
2.11. Definition der Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit mit formalem Grenzwertkonzept auf Basis von Folgen

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.12. Graphische Interpretation von Differenzierbarkeit (z. B. „kein Knick im Graph“)

a) Die Funktionen f und g sind nicht differenzierbar. Der Graph von f hat eine Sprungstelle, der Graph von g einen Knick. h ist differenzierbar, da die Kurve weder Knicke, Sprungstellen noch Lücken aufweist.

b)



Anmerkung: Es ist nach den Stellen (auf der x-Achse) gefragt. Eine Markierung der entsprechenden Punkte am Graphen wäre entsprechend nicht korrekt.

2.13. Rechnerisches Differenzieren und Integrieren reeller Funktionen

a) (i) $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
   (ii) $f'(x) = \mathrm{e}^x$
   (iii) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
   (iv) $f'(x) = \cos(x)$
   (v) $f'(x) = -\sin(x)$
   (vi) $f'(x) = 0$
   (vii) $f'(x) = 3x^2 - 6x$
   (viii) $f'(x) = 9(1-x^2)^8 \cdot (-2x) = -18x(1-x^2)^8$

b) (i) z. B. $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 5x$
   (ii) z. B. $F(x) = -2\frac{1}{x}$
   (iii) z. B. $F(x) = -\mathrm{e}^{-2x}$

c) Für $f(x) = x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$ und eine Stammfunktion ist gegeben durch $F(x) = \frac{1}{4}x^4$.
Es folgt: $f'(4) = 3 \cdot 4^2 = 48$ und $\displaystyle\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = F(3) - F(0) = \frac{81}{4}$.

2.14. Anschauliche/graphische Beziehung zwischen Funktions- und Ableitungsgraph

☒ brauner Graph 1
☐ blauer Graph 2
☐ grüner Graph 3
☐ roter Graph 4

2.15. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

a) (i) Es gilt

$$\int_{-1}^{2} (2x^3 + 1)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^4 + x\right]_{-1}^{2} = 10 - (-\frac{1}{2}) = 10{,}5.$$

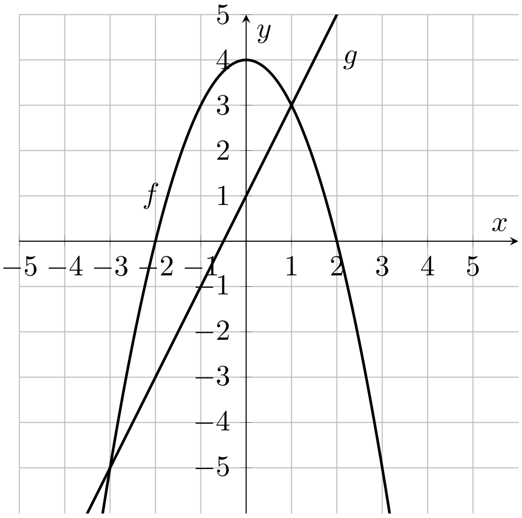
(ii) Es gilt

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x))\ \mathrm{d}x = \left[x + \frac{1}{2}\sin(2x)\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

b) Es gilt

$$F(x) = \int_{3}^{x} \left(6t^2 - 8t\right)\ \mathrm{d}t = \left[2t^3 - 4t^2\right]_{3}^{x} = 2x^3 - 4x^2 - 18.$$

c) (i) Es ergibt sich folgende Skizze:



(ii) Bestimmung der Nullstellen von f:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{oder} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Da f zwischen beiden Nullstellen positiv ist, ist der gesuchte Flächeninhalt gegeben durch den Wert des folgenden Integrals:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right)\ \mathrm{d}x &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2} = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 \\ &= \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \end{aligned}$$

(iii) Schnittpunktberechnung von f und g:

$$\begin{aligned} & f(x) = g(x) \\ \Leftrightarrow \quad & -x^2 + 4 = 2x + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = -3 \quad \text{oder} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Da zwischen beiden Schnittpunkten $f(x) > g(x)$ gilt, ist der gesuchte Flächeninhalt gegeben durch den Wert des folgenden Integrals:

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{1} \left(-x^2 + 4 - 2x - 1\right)\ \mathrm{d}x \\ & = \int_{-3}^{1} \left(-x^2 - 2x + 3\right)\ \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x\right]_{-3}^{1} \\ & = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \end{aligned}$$

2.16. Definition und Bestimmung von Extrem- und Wendestellen

a) Es gilt $f(x) = x^3 - 6x + 1$, $f'(x) = 3x^2 - 6$, $f''(x) = 6x$ und $f'''(x) = 6$. Wir prüfen die notwendige Bedingung für eine Extremstelle x von f:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad x = -\sqrt{2}.$$

Hinreichende Bedingung für eine Extremstelle x von f ist $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$. Es gilt

$$f'(\sqrt{2}) = 0 \text{ und } f''(\sqrt{2}) = 6 \cdot \sqrt{2} > 0.$$

An der Stelle $\sqrt{2}$ liegt eine lokale Minimalstelle vor. Außerdem gilt

$$f'(-\sqrt{2}) = 0 \text{ und } f''(-\sqrt{2}) = 6 \cdot (-\sqrt{2}) < 0.$$

An der Stelle $-\sqrt{2}$ liegt also eine lokale Maximalstelle vor.

Mit $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 1 = -4\sqrt{2} + 1$ befindet sich der Tiefpunkt bei $(\sqrt{2} \mid -4\sqrt{2} + 1)$.
Mit $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} + 1 = 4\sqrt{2} + 1$ befindet sich der Hochpunkt bei $(-\sqrt{2} \mid 4\sqrt{2} + 1)$.

Wendepunkt:
Wegen $f''(0) = 0$ und $f'''(0) \neq 0$ liegt an der Stelle 0 ein Wendepunkt mit den Koordinaten $(0 \mid f(0))$ also $(0 \mid 1)$ vor. Dies ist der einzige Wendepunkt, denn notwendig für einen Wendepunkt ist die Bedingung $f''(x) = 0$, welche nur für $x = 0$ erfüllt wird.

b) f ist monoton fallend zwischen der Maximalstelle und der Minimalstelle, also im Intervall $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

c)

	wahr	falsch
An jeder lokalen Maximalstelle ändert sich das Monotonieverhalten der Funktion von streng monoton wachsend zu streng monoton fallend.		$\times$
Eine Funktion hat immer an der Stelle ein Minimum, an der die Steigung ihres Graphen am kleinsten ist.		$\times$
Bei einer Wendestelle ist die Steigung des Graphen der Funktion immer Null.		$\times$
Bei einer Wendestelle hat die Steigung des Graphen der Funktion ein lokales Maximum oder lokales Minimum.	$\times$	
Eine zweimal differenzierbare Funktion g mit $g(x)'' \neq 0$ hat an der Stelle x eine Extremstelle.		$\times$

2.17. Extremwertprobleme

Die Funktion u, die in Abhängigkeit von x den gesuchten Umfang angibt, lautet

$$u(x) = 2x + 2 \cdot f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 8.$$

Es gilt: $u'(x) = -x + 2$.
Wir bestimmen die Nullstelle der ersten Ableitung und somit eine mögliche lokale Extremstelle:

$$u'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Es handelt sich um ein Maximum, da $u''(x) = -1 < 0$.

Dieses lokale Maximum ist gleichzeitig das globale Maximum auf dem Intervall $[0\,;\,4]$, da $u(2) = -2 + 4 + 8 = 10$ ist und für die Ränder des Intervalls gilt

$$u(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot f(0) = 0 + 2 \cdot 4 = 8 < 10$$

und

$$u(4) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot f(4) = 8 + 0 = 8 < 10.$$

Der maximale Umfang des gesuchten Rechtecks ist also 10 LE.

2.18. Rotationsvolumen

Lösung a) ist richtig.

2.19. Begriff des Algorithmus

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.20. Einfache Numerische Methoden (wie z. B. Trapezregel oder Newtonverfahren)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

Differentiations- und Integrationsregeln

2.21. Potenz-, Faktor- und Summenregel (Differential- und Integralrechnung)

a)

$$f'(r) = 6ar$$

b)

$$f'(t) = -\frac{4}{t^3} + \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

c)

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x)\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos(x)\ \mathrm{d}x = \Big[\sin(x)\Big]_0^{2\pi} = 0$$

d)

$$\int (\cos(x) + 2x)\ \mathrm{d}x = \int \cos(x)\ \mathrm{d}x + \int 2x\ \mathrm{d}x = \sin(x) + x^2 +\ C \text{ mit } C \in \mathbb{R}$$

e)

$$\int \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{3}}{\pi}\frac{1}{x} +\ C \text{ mit } C \in \mathbb{R}$$

f)

$$\int \mathrm{e}^{-ax}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{-ax} + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}$$

2.22. Produktregel (Differentialrechnung)

$$f'(x) = -\sin(x)\,\mathrm{e}^x + \cos(x)\,\mathrm{e}^x = (\cos(x) - \sin(x))\,\mathrm{e}^x$$

2.23. Kettenregel (Differentialrechnung)

a)

$$f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{2x-1}$$

b)

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2} + x\,\mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x = \left(2x^2 + 1\right)\mathrm{e}^{x^2}$$

c)

$$f_k'(t) = \ln\left(k - t^2\right) + t \cdot \frac{1}{k - t^2} \cdot (-2t) = \ln\left(k - t^2\right) - \frac{2t^2}{k - t^2}$$

2.24. Substitutionsregel (Integralrechnung)

a) Wir nutzen die Substitutionsregel. Mit $t = x + 4$ und damit $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$ gilt

$$\int (x+4)^5 \ \mathrm{d}x = \int t^5 \ \mathrm{d}t = \frac{1}{6}t^6 + \ C = \frac{1}{6}(x+4)^6 + C \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

b) Wir nutzen die Substitutionsregel. Mit $t = 3x - 2$ und damit $\mathrm{d}t = 3 \cdot \mathrm{d}x$ gilt

$$\int \mathrm{e}^{3x-2} \ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\mathrm{e}^t \ \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\mathrm{e}^t + \ C = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-2} + \ C \text{ mit } C \in \mathbb{R}.$$

2.25. Partielle Integration (Integralrechnung)

a)

$$\int x \cdot \sin(x) \ \mathrm{d}x = -x \cdot \cos(x) - \int -\cos(x) \ \mathrm{d}x = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + \ C$$

Eine Stammfunktion von f ist also z. B. gegeben durch

$$F(t) = -x \cdot \cos(x) + \sin(x).$$

b) (i)

$$\begin{aligned} \int t \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \ \mathrm{d}t &= -2t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - \int -2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \ \mathrm{d}t \\ &= -2t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} - 4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + \ C = -2(t+2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + \ C \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von g ist also z. B. gegeben durch

$$G(t) = -2(t+2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \int_0^3 t \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} \ \mathrm{d}t &= \left[-2(t+2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\right]_0^3 \\ &= -2(3+2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 3} + 2(0+2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 0} \\ &= -10\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} + 4 \end{aligned}$$

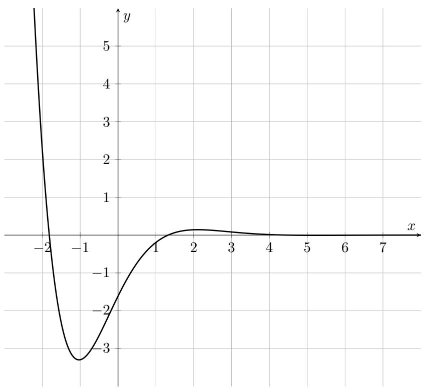
Vorstellungen von Ableitung und Integral

2.26. Ableitung als Tangentensteigung

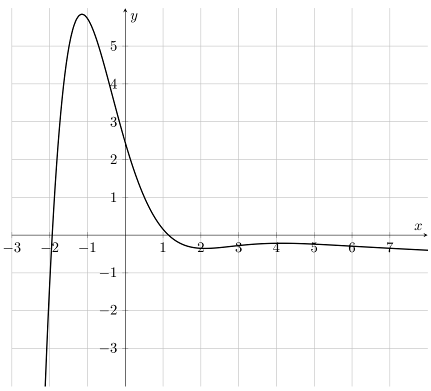
a) Wir betrachten die Umgebung von f an der Stelle $x = 0$:
Für $x < 0$ und $0 < x < 2$ ist die Ableitungsfunktion negativ, d. h. der Graph von f ist monoton fallend für $x \in (\infty; 0]$ und $x \in [0; 2]$. Für $x = 0$ ist die Ableitungsfunktion 0. Damit liegt an der Stelle $x = 0$ ein Sattelpunkt vor.

Wir betrachten nun die Umgebung von f an der Stelle $x = 2$:
Für $0 < x < 2$ ist die Ableitungsfunktion negativ. D. h. der Graph von f ist monoton fallend für $x \in [0; 2]$. Für $x > 2$ ist die Ableitungsfunktion positiv, d. h. der Graph von f ist monoton steigend für $x \in [2, \infty)$. Für $x = 2$ ist die Ableitungsfunktion 0. Damit liegt an der Stelle $x = 2$ ein Minimum vor.

b)



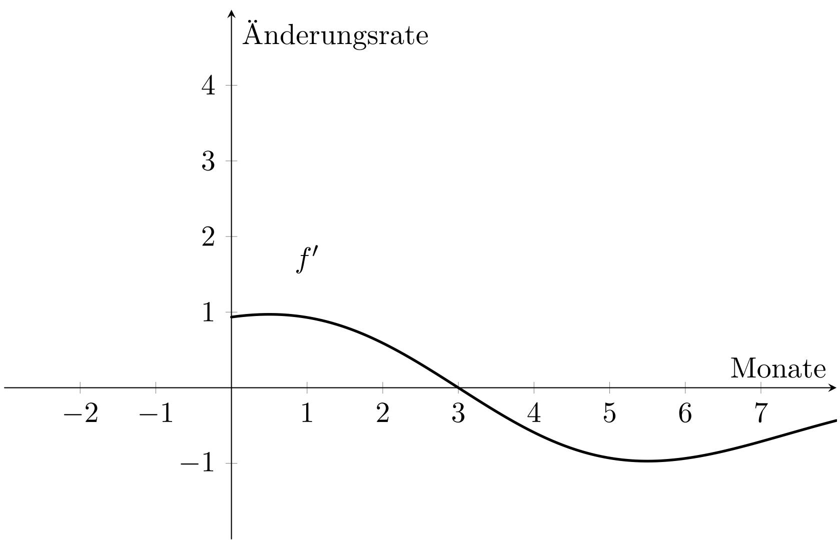
☐ ja ☒ nein



☒ ja ☐ nein

2.27. Ableitung als lokale Änderungsrate

Der Funktionswert $f'(t)$ gibt die momentane Änderungsrate der Anzahl der erkrankten Personen zum Zeitpunkt t an. Da f' für $t < 3$ positive Funktionswerte annimmt, lässt sich erkennen, dass für $t < 3$ mehr Menschen krank als gesund werden. Für $t > 3$ nimmt f' negative Funktionswerte an, d. h. mehr Menschen werden gesund als krank.



2.28. Ableitung als lokale lineare Approximation

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

2.29. Bestimmtes Integral als orientierter Flächeninhalt

a) (i)

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = 2$$

(ii)

$$\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x = \Big[-\cos(x)\Big]_{\pi}^{2\pi} = -2$$

(iii)

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x = \Big[-\ \cos\Big]_0^{2\pi} = 0$$

b) $A = \left|\int_0^{\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\ \mathrm{d}x\right| = 2 + 2 = 4$

2.30. Bestimmtes Integral als rekonstruierter Bestand aus momentaner Änderungsrate

Es gilt

$$\int -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 1\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{15}t^3 + t^2 + t + C.$$

a) Wir berechnen die Wassermenge, die nach drei Stunden in diesem Becken ist:

$$\int_0^3 -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 1\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{15}t^3 + t^2 + t\right]_0^3 = \frac{51}{5}.$$

Nach drei Stunden sind in dem Becken $10{,}2m^3$ Wasser.

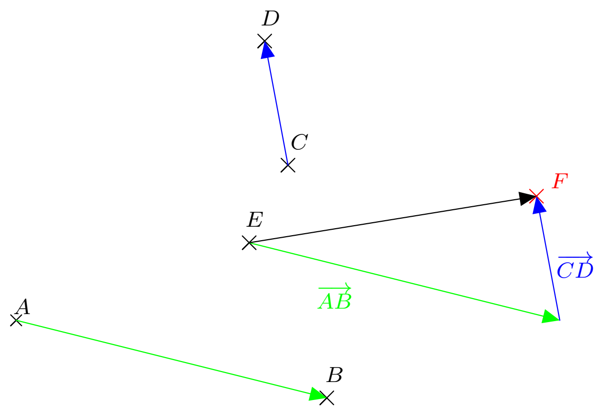
b) Wir berechnen die maximale Wassermenge im angegebenen Zeitintervall. Wir berechnen also die zugeflossene Wassermenge im gesamten Zeitintervall:

$$\int_0^9 -\frac{1}{5}t^2 + 2t + 1\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{15}t^3 + t^2 + t\right]_0^9 = \frac{207}{5}.$$

In dem Zeitintervall sind $41{,}4m^3$ Wasser zugeflossen.

3. Mathematische Inhalte: Lineare Algebra und Analytische Geometrie

3.1. Vektoren als Pfeilklassen



3.2. Komponentendarstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Wählt man

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

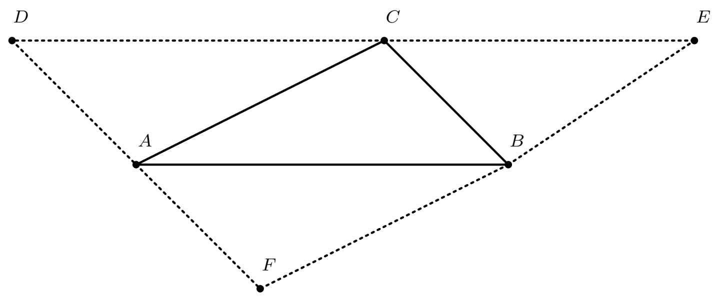
so erhält man $D(-3|0|-2)$.
Wählt man

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix},$$

so erhält man $E(11|8|8)$.
Wählt man

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so erhält man $F(5|8|0)$.



3.3. Elementare Operationen mit Vektoren (Addition, Skalarmultiplikation, Skalarprodukt und Kreuzprodukt)

	Vektor	Zahl	nicht definiert
$\vec{u} \times \vec{v}$	☒	☐	☐
$\vec{u} \circ \vec{v} \circ \vec{w}$	☐	☐	☒
$(\vec{u} - \vec{v}) - (-\vec{v} + \vec{u})$	☒	☐	☐
$\vec{u} \times \vec{v} + \frac{\vec{w}}{\vec{w}}$	☐	☐	☒
$\lvert\vec{w}\rvert \cdot (\vec{v} \circ \vec{u})$	☐	☒	☐
$(\vec{w} \times \vec{w}) - \frac{\vec{w}}{\lvert\vec{w}\rvert}$	☒	☐	☐

3.4. Skalarprodukt und Kreuzprodukt

a) Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ist. Es gilt

$$\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = 2\cdot 4 + 4\cdot 1 + 6\cdot(-2) = 8 + 4 - 12 = 0.$$

Also sind die beiden Vektoren orthogonal.

b) Um einen Quader aufzuspannen, muss ein solcher Vektor orthogonal zu den beiden Vektoren aus a) sein. Eine Möglichkeit ist durch das Kreuzprodukt der in a) vorliegenden Vektoren gegeben:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot(-2) - 6\cdot 1\\6\cdot 4 - 2\cdot(-2)\\2\cdot 1 - 4\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\28\\-14\end{pmatrix}.$$

c) Zur Berechnung des Winkels können wir die Formel

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

verwenden. Es gilt

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix} = 2\cdot(-2) + 2\cdot 3 + (-6)\cdot(-6) = 38$$

und

$$\begin{aligned}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| &= \left|\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-2\\3\\-6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-6)^2}\cdot\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-6)^2}\\ &= \sqrt{44}\cdot\sqrt{49}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{38}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{49}} = \frac{38}{\sqrt{2156}}.$$

Es folgt $\gamma \approx 35{,}1°$.

3.5. Kollinearität von Vektoren

a) Aus $\vec{c} = 3\vec{a}$ und $\vec{d} = -0{,}5\vec{a}$ und $\vec{c} = -6\vec{d}$ und $\vec{f} = 4\vec{b}$ folgt, dass $\vec{a}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sowie $\vec{b}$ und $\vec{f}$ kollinear sind.

b) Der gesuchte Vektor ist $\vec{e}$. Ein dazu kollinearer Vektor ist z. B.

$$2\vec{e} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

3.6. Linearkombination und lineare Abhängigkeit von Vektoren (über Kollinearität hinaus)

a) $\vec{c} = \vec{a}$

$\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

b) $\vec{c} = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{a}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} - \vec{a}\right) = -\frac{1}{2}\vec{b}$

3.7. Matrizen, Matrizenaddition, Matrix-Vektor-Multiplikation (nur 2x2-Matrizen)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein für allgemeinbildende Schulen abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

3.8. Matrizenmultiplikation und inverse Matrizen (nur 2x2-Matrizen)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein für allgemeinbildende Schulen abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

3.9. Geometrische Transformation (Spiegelung, Rotation, Skalierung) und deren Darstellung durch Matrizen im $\mathbb{R}^2$

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

3.10. Analytische Beschreibung bzw. Darstellung von Punkt, Gerade und Ebene in Ebene und Raum

a) Eine Geradengleichung für eine Gerade durch die Punkte A und B erhält man z. B. durch $\vec{x} = \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ mit $s \in \mathbb{R}$, also

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4+1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) In Parameterform erhält man als eine Gleichung der Ebene $\vec{x} = \vec{a} + s \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + t \cdot (\vec{c} - \vec{a})$ mit $s, t \in \mathbb{R}$, also

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4+1 \\ 1-4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1-2 \\ 8+1 \\ 3-4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ kann eine Gleichung der Ebene auch in Normalform angegeben werden, z. B. durch

$$\begin{aligned} & E: \left((\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})\right) \circ [\vec{x} - \vec{a}] = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & E: \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & E: \begin{pmatrix} -5+27 \\ 9+1 \\ 9+15 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & E: \begin{pmatrix} 22 \\ 10 \\ 24 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right] = 0 \end{aligned}$$

c) D liegt in der Ebene E, wenn $\vec{d}$ die Ebenengleichung erfüllt, das folgende Gleichungssystem also lösbar ist:

$$\begin{array}{lr} \mathrm{I} & 2 + s - 3t = -2 \\ \mathrm{II} & -1 + 5s + 9t = 3 \\ \mathrm{III} & 4 - 3s - t = 6 \end{array}$$

Aus I folgt $s = 3t - 4$.

Wir setzen I in II ein:

$$\begin{aligned} & -1+5\cdot(3t-4)+9t=3 \\ \Leftrightarrow\quad & -1+15t-20+9t=3 \\ \Leftrightarrow\quad & 24t=24 \\ \Leftrightarrow\quad & t=1 \\ \Rightarrow\quad & s=3-4=-1 \end{aligned}$$

Wir setzen die Ergebnisse in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1-3 \\ -1-5+9 \\ 4+3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{d}$$

Somit liegt der Punkt D in der Ebene.

3.11. Analytische Beschreibung und Darstellung von Kreis und Kugel in Ebene und Raum

a) $(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 + (x_3 - 1)^2 = 50$

b) Es gilt

$$(3-2)^2 + (4+3)^2 + (1-1)^2 = 1 + 49 + 0 = 50.$$

Somit liegt Q auf der Kugel.

3.12. Winkel- und Lagebeziehungen (Schnittpunkt, Abstand) von geometrischen Objekten in Ebene und Raum

Zunächst stellen wir fest, dass die Richtungsvektoren von g und von h nicht kollinear sind. Also haben g und h entweder einen Schnittpunkt oder sind windschief.
Da offenbar der Punkt $P(1|2|4)$ auf beiden Geraden liegt, können g und h nicht windschief sein. Also schneiden sich g und h (im Punkt P).

4. Mathematische Inhalte: Stochastik und bereichsübergreifende Inhalte

Stochastik

4.1. Abzählende Kombinatorik (Permutationen, Variationen, Kombinationen, Zählprinzipien)

Es werden 3 Kugeln gezogen...	Anzahl			
ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge	☒ $\frac{10!}{7!}$	☐ 10^3	☐ $\binom{10}{7}$	☐ $\frac{10!}{3!}$
ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge	☐ $\binom{13}{3}$	☐ $\frac{12!}{3!}$	☐ 3^{10}	☒ $\binom{10}{3}$
mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge	☐ $\frac{10!}{3!}$	☐ $8 \cdot 9 \cdot 10$	☐ $\binom{12}{3}$	☒ 10^3

4.2. Wahrscheinlichkeit sowie diskrete Zufallsgrößen (Binomialverteilung) und Normalverteilung

a) (i) (1)

$$P(X=0) = \binom{10}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}0173$$

(2)

$$\begin{aligned}
&P(X<5) = P(X \leq 4)\\
&= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\\
&= \binom{10}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{9} + \binom{10}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{8}\\
&+ \binom{10}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{7} + \binom{10}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^{6}\\
&\approx 0{,}7869
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
P(3 \leq X \leq 7) = P(X=7)+P(X=6)+P(X=5)\\
+P(X=4)+P(X=3) \approx 0{,}6975
\end{aligned}$$

(ii) Es wird 10 mal gewürfelt. Die Zufallsgröße X beschreibt z. B. die Anzahl der gewürfelten Einsen und Zweien. Dann ergibt sich für die beschriebenen Werte:
$P(X = 0)$: Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Würfen keine Eins und keine Zwei geworfen wird.
$P(X < 5)$: Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Würfen weniger als 5 mal eine Eins oder Zwei geworfen wird.
$P(3 \leq X \leq 7)$: Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Würfen mindestens 3 mal und maximal 7 mal, eine Eins oder Zwei geworfen wird.

b) (i) Es ergibt sich folgende Tabelle:

k	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

(ii) Wegen

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = P((2;2)) = P(A \cap B)$$

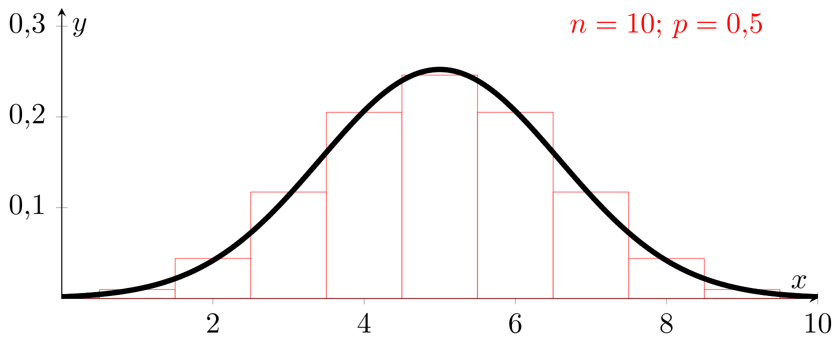
sind A und B stochastisch unabhängig.

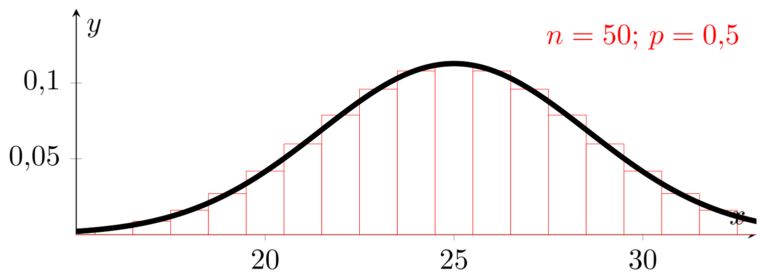
c) (i) Eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p lässt sich durch eine Normalverteilung annähern, falls für ihre Standardabweichung σ die Laplace-Bedingung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} > 3$$

gilt.

(ii) Es muss die Stichprobengröße n beachtet werden, da sich die Binomialverteilung für große n der Normalverteilung annähert. Man betrachte dazu folgende Diagramme.





(iii) Es gilt

$$n \cdot \frac{5}{100} \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right) > 9 \Leftrightarrow n \cdot \frac{19}{400} > 9 \Leftrightarrow n > \frac{3600}{19} \approx 189{,}47.$$

Der Stichprobenumfang n muss also mindestens 190 betragen, damit die Binomialverteilung durch die Normalverteilung angenähert werden darf.

4.3. Grundlegende Begriffe der deskriptiven Statistik: Mittelwert, Häufigkeit, Spannweite und Standardabweichung

a) Der Erwartungswert ist

$$E(X) = 0{,}25 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot 4 + 0{,}45 \cdot 9 = 5{,}5,$$

die Varianz

$$Var(X) = 0{,}25 \cdot (E(X) - 1)^2 + 0{,}3 \cdot (E(X) - 4)^2 + 0{,}45 \cdot (E(X) - 9)^2 = 11{,}25$$

und die Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \approx 3{,}3541$.

b) Als arithmetischer Mittelwert ergibt sich

$$\bar{x} = \frac{37 + 40 + 42 + 38 + 40 + 45}{6} = \frac{121}{3} = 40,\bar{3}$$

und die Spannweite ist $R = 45 - 37 = 8$.
Es gilt für die Varianz

$$Var(X) = \frac{(37 - \frac{121}{3})^2 + (40 - \frac{121}{3})^2 + \cdots + (45 - \frac{121}{3})^2}{6} = \frac{62}{9} = 6,\bar{8}.$$

Also ist die Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} \approx 2{,}6247$.

Bereichsübergreifende Inhalte

4.4. Konkrete Anwendung der Aussagenlogik (Aussagen und ihre Verknüpfung, Aussageformen, Umkehrung von Aussagen, Rechnen mit Aussagevariablen sowie Existenz- und All-Aussagen)

a) (i) Die Aussage ist richtig. Sei f ein Polynom mit ungeradem Grad. Dann gilt nämlich entweder $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. In beiden Fällen ist gegeben, dass der Funktionsgraph mindestens einmal die x-Achse schneiden muss.

(ii) Die Aussage ist falsch. Ein Gegenbeispiel ist die Funktion$f$ mit $f(x) = x^2-1$. Sie besitzt 2 Nullstellen, und zwar bei -1 und 1.

(iii) Die Aussage ist richtig. Sei f eine quadratische Funktion, also

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad a \neq 0.$$

Es folgt $f''(x) = 2a \neq 0$. Damit wird die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt nicht erfüllt, also kann f auch keine Wendestellen besitzen.

(iv) Die Aussage ist falsch. 0 liegt nicht im Definitionsbereich.

(v) Die Aussage ist falsch. 0 liegt nicht im Wertebereich.

(vi) Die Aussage ist falsch. Z. B. ist die reelle Funktion f mit $f(x) = 0{,}5^x$ monoton fallend.

(vii) Die Aussage ist falsch. Für $n = 1$ ist die reelle Funktion f mit $f(x) = x$ nicht achensymmetrisch.

(viii) Die Aussage ist falsch. Die Definitionsmenge der reellen Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x-5}$ ist die Menge aller Zahlen, die größer oder gleich $+5$ sind.

(ix) Die Aussage ist richtig. Da die trigonometrischen Funktionen 2π-periodisch sind, reicht es, die Funktionen im Intervall $[0; 2\pi]$ zu untersuchen. Die Maximalstelle von $f(x) = \sin(x)$ auf diesem Intervall ist $\frac{\pi}{2}$, da $f'(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $f''(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$. Nun gilt $g''(\frac{\pi}{2}) = \cos''(\frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $g'''(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$. Also ist $\frac{\pi}{2}$ Wendestelle von cos nach dem hinreichenden Kriterium.

b) Der Fehler wurde am 4. Folgepfeil gemacht. Dort wurde durch $(a-b)$ geteilt. Da $a = b$ nach Voraussetzung gilt, folgt $(a-b) = 0$. Beim 4. Folgepfeil wurde also durch 0 geteilt.

Ein weiterer (kleinerer) Fehler besteht im letzten Folgepfeil. Dieser ist nur richtig für $b \neq 0$. Nach Voraussetzung ist nur $b \in \mathbb{R}$ vorgegeben, also ist $b = 0$ nicht ausgeschlossen und der letzte Folgepfeil damit nicht immer richtig.

4.5. Quantoren und Prädikatenlogik (Ergänzung zu Aussagenlogik)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

4.6. Beweisverfahren (direkter und indirekter Beweis, vollständige Induktion)

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

4.7. Übergeordnete Begriffe wie Definition, Beispiel, Aussage, Satz (allgemeingültige Regel), Beweis, Heuristik

a)

	Definition	Aussage	Satz	Beweis
Wenn bei einem Rechteck zwei aneinander grenzende Seiten gleich lang sind, ist es ein Quadrat.		×	×	
Bei einem Quadrat sind alle Seiten gleich lang, die Diagonalen halbieren sich und es gibt vier rechte Winkel.		×	×	
Ein Viereck heißt genau dann Quadrat, wenn seine Diagonalen gleich lang sind, sich gegenseitig halbieren und senkrecht aufeinander stehen.	×			
Bei einem gleichschenkligen Dreieck ist eine Winkelhalbierende eine Symmetrieachse, daher sind die Basiswinkel gleich groß.				×
Ein Viereck heißt genau dann Quadrat, wenn alle Seiten gleich lang sind und es einen rechten Winkel besitzt.	×			
Jedes Rechteck ist auch ein Quadrat.		×		
Jedes Quadrat ist ein Rechteck.		×	×	
Wenn ein Viereck vier gleich lange Seiten hat, ist es eine Raute. Wenn ein Winkel bei einer Raute ein rechter Winkel ist, muss der gegenüberliegende Winkel auch ein rechter Winkel sein, da gegenüberliegende Winkel gleich groß sind. Es bleiben dann 180° Innenwinkel übrig, die auf zwei Winkel aufzuteilen sind, sodass jeder Winkel 90° groß sein muss.				×

Erläuterungen:
Definitionen sollten keine überflüssigen Informationen enthalten.

Aussagen können auch falsch sein.

Ein Satz ist eine Aussage, für die es einen Beweis gibt.

Jeder Satz ist eine Aussage.

b) *Heuristiken*, z. B. Vorwärtsarbeiten, Rückwärtsarbeiten, systematisches Probieren, Suche nach Beziehungen.
Prinzipien, z. B. Symmetrien, Analogien, Zerlegung (Fallunterscheidung, Extremalprinzip).
Hilfsmittel, z. B. Informative Figur/Skizze, Tabelle, Lösungsgraph, Wissensspeicher (bekannte Definitionen, Sätze), Gleichungen.

Anmerkung:
Beispielhafte Lösungsprozesse für die Probleme, die besonders viele dieser Prinzipien abbilden, finden sich in Aufgabe 5.31.

4.8. Kenntnisse zu Zielen mathematischen Arbeitens (z. B. Begriffsbildung, Untersuchung von Strukturen)

Die richtige Zuordnung ist (a)–(3), (b)–(2), (c)–(4), (d)–(1), also

(a) Mathematik ist eine Geisteswissenschaft, denn... ... sie ist ein gedankliches Konstrukt mit einem rein logischen Gebäude. ... sie bildet Begriffe losgelöst von der Realität. ... sie untersucht und beschreibt abstrakte Zusammenhänge.	(3) Beispiele: Vermutungen mit Hilfe von Sätzen und Definitionen beweisen; verschiedene Zahlbereiche, Funktionstypen; irrationale Zahlen sind nicht periodische nicht abbrechende Dezimalzahlen
(b) Mathematik ist ähnlich zu den Naturwissenschaften, denn... ... sie bildet teilweise natürliche Strukturen ab. ... sie wird genutzt, um reale und alltägliche Probleme zu lösen.	(2) Beispiele: Geometrie als Abstrahierung der Formen/Figuren in der Welt; Flugbahnen von Raketen berechnen
(c) Mathematik ist ähnlich zu den Sprachwissenschaften, denn... ... sie nutzt eine eigene formale Sprache, um Erkenntnisse zu formulieren. ... sie hat eigene Regeln zum Umgang mit Zahlen und Symbolen.	(4) Beispiele: eigene Symbole, Konventionen zur Formulierung von Aussagen oder Beweisen; Rechenregeln
(d) Mathematisch arbeiten hat handwerkliche Aspekte, denn... ... man muss rechnerische Anforderungen bewältigen. ... man muss Hilfsmittel sachgerecht einsetzen.	(1) Beispiele: effizientes und geschicktes Rechnen; Taschenrechner, Computer-Geometrie-Systeme, Geodreieck und Zirkel

4.9. Fehlerfortpflanzung und Fehler- und Ausgleichsrechnung

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

5. Mathematische Arbeitstätigkeiten

Grundlagen (Rechnen, Hilfsmitteleinsatz, Darstellungen)

5.1. Schnelles und korrektes Ausführen von bekannten Verfahren ohne elektronische Hilfsmittel (z. B. Bestimmen von Ableitung und Integral; Lösen von Gleichungssystemen; Umformungen, wobei einfache Rechenschritte im Kopf gelöst werden können)

a)

$$\frac{3a}{2a-a^2}-\frac{2}{2-a}=\frac{3}{2-a}-\frac{2}{2-a}=\frac{3-2}{2-a}=\frac{1}{2-a}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{x+y}{x}+\frac{x-y}{y}&=\frac{xy+y^2+x^2-xy}{xy}\\&=\frac{x^2+y^2}{xy}\end{aligned}$$

5.2. Sicherer Umgang mit Taschenrechnern und Computern zur Lösung von Aufgaben (z. B. einfache graphische Lösungsverfahren, aber auch kritische Betrachtung von Ergebnissen)

a) Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$x=\frac{5723}{8606}, y=\frac{10711}{4303}, z=\frac{4752}{4303}.$$

b) Lösungen der Gleichung sind z. B.
$x \approx 0{,}75402494712 \approx 43{,}2024°$,
$x \approx 1{,}49076288606276 \approx 85{,}4144°$,
$x \approx 4{,}712394054938 \approx 270{,}0003°$,
$x \approx 7{,}85398163356496 \approx 449{,}9999°$

c) Mathematisch gesehen hat Maria recht. Bei Pauls und Lenas Lösungen würden die 50€ nicht ausreichen. Marias Lösung ist in der Realität allerdings nicht umsetzbar. Es können alle höchstens 16,66€ erhalten und 2 Ct. bleiben übrig.

d) David hat nicht Recht.
Die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = x$ ist $\mathbb{L}_x = \{0; 1\}$. Der Taschenrechner gibt nur die erste mögliche Lösung der Gleichung an, die er durch ein Näherungsverfahren ermittelt hat.

5.3. Sprachliche Fähigkeiten (Deutsch, ohne spezielle mathematische Fachbegriffe) zum Verstehen von Aufgabenstellungen oder Texten zur Mathematik, z. B. in der Fachliteratur

	wahr	falsch
Das Beweisen als mathematische Methode entstand erst in neuerer Zeit.		×
Es gab in der Mathematik lange Zeit keine Einigkeit, wie der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ zu definieren ist.	×	
Ideen von Leibniz und Newton führten zur Infinitesimalrechnung.	×	
Die Anfänge der Mathematik wurden von den „alten Griechen“ gelegt.		×
Geometrische Figuren lassen sich nur per Zeichnung und nicht rechnerisch beschreiben.		×
Man weiß bisher nicht, was Mathematik ist.		×

5.4. Sprachliche Fähigkeiten (Englisch, ohne spezielle mathematische Fachbegriffe) zum Verstehen von Aufgabenstellungen oder Texten zur Mathematik, z. B. in der Fachliteratur

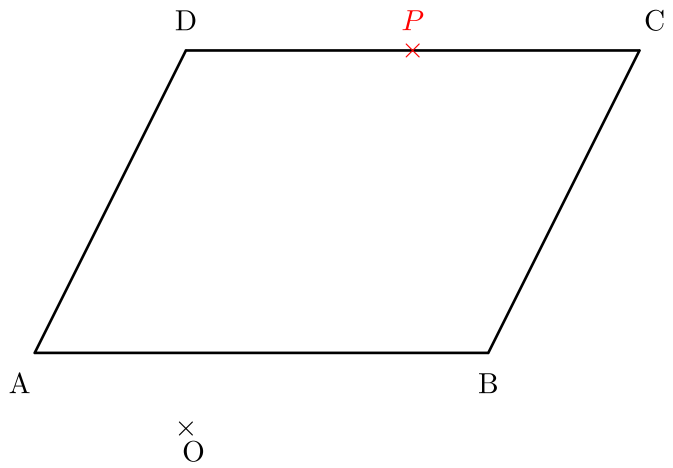
Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

5.5. Sicherer Umgang mit grundlegender mathematischer Formelsprache (ohne elektronische Hilfsmittel)

$P_A(B)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis B eintritt, unter der Voraussetzung, dass Ereignis A eingetreten ist. Also beschreibt $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind ein Junge ist, wenn es bei rot über die Ampel gegangen ist.

5.6. Sicherer Umgang mit Standarddarstellungen von Termen/Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen, Vektoren und geometrischen Objekten (ohne elektronische Hilfsmittel)

a) Es handelt sich um den Mittelpunkt der Strecke $\overline{DC}$.



b) Ben hat nicht recht. Im Jahr 2025 wird es bei gleichbleibendem Mitgliederschwund noch ca. 85000 Mitglieder geben. Ben hat nicht auf die Ordinate (y-Achse) geachtet.

c) Es ergibt sich ein Anstieg von 553 auf 566 Abiturientinnen und Abiturienten aus den ländlichen Regionen und damit ein Zuwachs von 13 Personen.

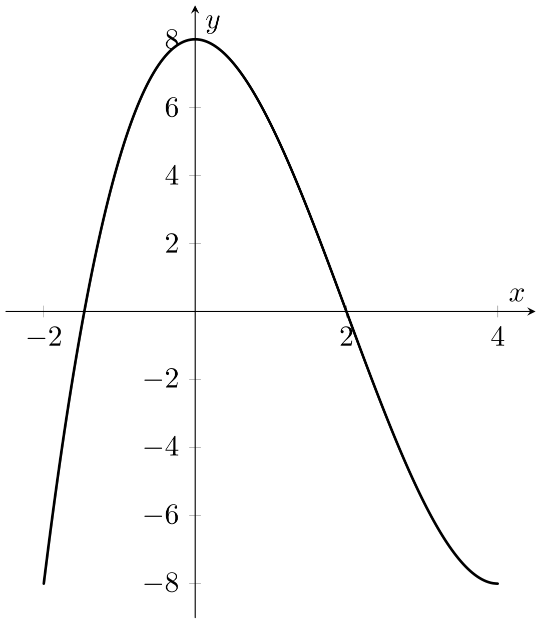
5.7. Sicherer Umgang mit dem Summenzeichen und dem Produktzeichen

Zum Summenzeichen siehe 2.6.
Das Produktzeichen ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

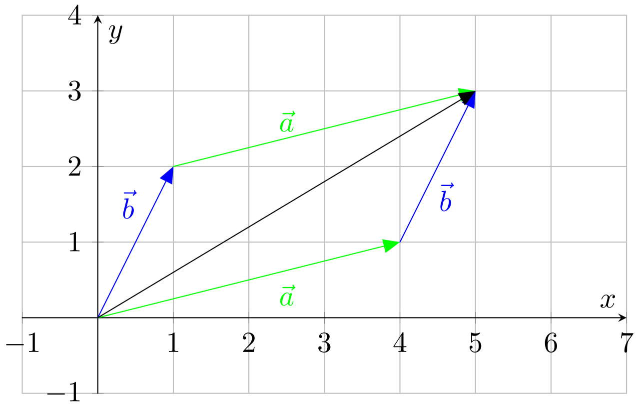
5.8. Schnelles und sicheres Wechseln zwischen unterschiedlichen Standarddarstellungen (z. B. bei Termen/Gleichungen, Funktionen, Diagrammen, Tabellen, Vektoren, geometrischen Objekten sowie Summen- und Produktzeichen) ohne elektronische Hilfsmittel

a)

$h(x) = x^3 - 2x^2 + 8$	
$h(x) = 2x^3 + 8$	
$h(x) = 8x + 8$	
$h(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 8$	$\times$

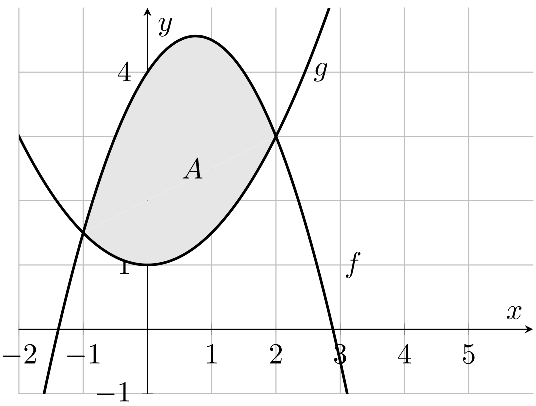


b) Eine mögliche Lösung wäre zum Beispiel



5.9. Entwickeln von Visualisierungen zu mathematischen Zusammenhängen (d. h. geeignete Auswahl einer Darstellungsart und Anfertigen der Darstellung ohne elektronische Hilfsmittel)

a)

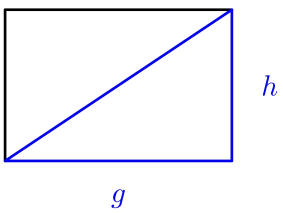


b) (i) Das untenstehende Rechteck hat den Flächeninhalt

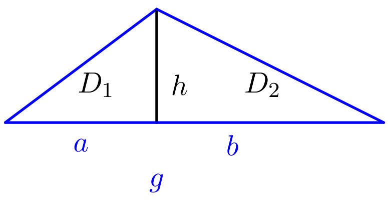
$$A_{Rechteck} = g \cdot h.$$

Da das rechtwinklige Dreieck genau das halbe Rechteck ist, folgt

$$A_{rechtw.Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$



(ii) Es ergibt sich folgende Skizze, wobei $g = a + b$ gilt:



Der Flächeninhalt des blauen Dreiecks ist die Summe der Flächeninhalte der beiden rechtwinkligen Dreiecke D_1 und D_2. Mit (i) gilt

$$A_{D_1} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \text{ und } A_{D_2} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} A_{Dreieck} &= A_{D_1} + A_{D_2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot h. \end{aligned}$$

Für ein beliebiges Dreieck ergibt sich somit die Flächeninhaltsformel

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h.$$

c)

Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$	$\times$
Zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π	
Zwischen π und $\frac{3}{2}\pi$	
Zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π	

Argumentieren und Beweisen

5.10. Verstehen und Explorieren von mathematischen Behauptungen und Sätzen (was wird ausgesagt, für welche Klasse von mathematischen Objekten gilt dies bzw. gilt dies nicht aufgrund der Voraussetzungen)

a) Es ist z. B. $\mathrm{e} < 3 < 4$ und $3^4 = 81 > 64 = 4^3$.

b) Da $\mathrm{e} < 8 < 9$, gilt nach der Behauptung $8^9 > 9^8$.
Mit $x = 9^8$ und $y = 8^9$ gilt $\mathrm{e} < x < y$ und damit $(8^9)^{(9^8)} < (9^8)^{(8^9)}$.

c) Es gilt z. B. $1 < 2$ und $1^2 = 1 < 2 = 2^1$, die Behauptung stimmt dann also im Allgemeinen nicht mehr.

5.11. Verstehen und Prüfen von mathematischen Beweisen

a) Zwischen Zeile (3) und (4) wird keine Äquivalenzumformung vorgenommen. Die Lösung $x = 0$ geht in diesem Schritt beim „Teilen durch x“ verloren.

b) (i) m und $m+1$ sind zwei aufeinanderfolgende Zahlen. Daher muss eine der beiden Zahlen gerade sein. Diese ist durch 2 teilbar.

(ii) Die Voraussetzung, dass n ungerade ist, wird zum ersten Mal im zweiten Satz verwendet.

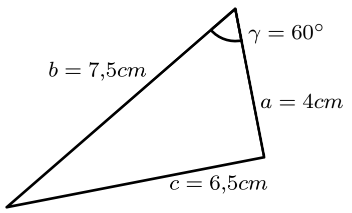
5.12. Erkennen von Zusammenhängen und Strukturen in gegebenen mathematischen Situationen (z. B. einfache Schlussfolgerungen oder Äquivalenzen)

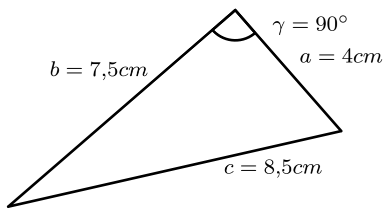
a) Die Länge der Dreiecksseite verändert sich mit der Größe des Winkels. Je größer der Winkel desto länger die Dreiecksseite (solange der Winkel nicht größer als 180° wird).

b) Der Zusammenhang wird durch den Kosinussatz beschrieben:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)}.$$

Verändert sich die Größe des Winkels γ, so verändert sich gemäß dieser Formel die gegenüberliegende Dreiecksseite c.





5.13. Entwickeln und Formulieren mathematischer Vermutungen und unterstützender Plausibilitätsargumente

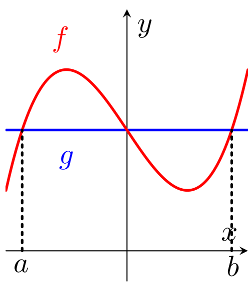
a)

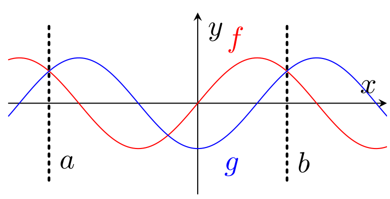
$$\frac{a-1}{a+1} \overset{(1)}{<} \frac{a-1}{a} \overset{(2)}{<} \frac{a}{a+1}$$

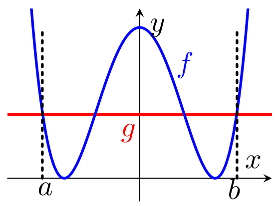
Die beiden Ungleichungen (1) und (2) werden getrennt betrachtet.
Begründungen:

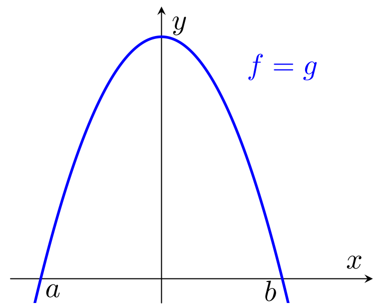
anschaulich	formal-mathematisch
(1) Zwei gleich große Torten werden in a bzw. $a+1$ gleich große Stücke geteilt. Die Stücke der zweiten Torte sind also kleiner. Nimmt man von jeder Torte $a-1$ Stücke, so erhält man dort weniger Torte, wo die kleineren Stücke sind. Dies ist bei der Torte, die in $a+1$ Stücke geteilt wurde, der Fall.	$\begin{aligned} & a < a+1 && \mid \cdot (a-1) \\ \Leftrightarrow\ & a \cdot (a-1) < (a+1)\cdot(a-1) && \mid : a \\ \Leftrightarrow\ & (a-1) < (a+1)\cdot \frac{a-1}{a} && \mid : (a+1) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a-1}{a+1} < \frac{a-1}{a} \end{aligned}$
(2)	Vorüberlegung: I) $\frac{a-1}{a} = \frac{a}{a} - \frac{1}{a} = 1 - \frac{1}{a}$ II) $\frac{a}{a+1} = \frac{a+1-1}{a+1} = \frac{a+1}{a+1} - \frac{1}{a+1}$ $= 1 - \frac{1}{a+1}$
Mit der Vorüberlegung kann das Problem gesehen werden als: Von zwei gleich großen Torten wird je ein Stück weggenommen. Es bleibt mehr von der Torte übrig, wenn ein kleineres Stück weggenommen wird.	$\begin{aligned} & \frac{1}{a} > \frac{1}{a+1} && \mid \cdot (-1) \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{a} < -\frac{1}{a+1} && \mid +1 \\ \Leftrightarrow\ & 1-\frac{1}{a} < 1-\frac{1}{a+1} && \mid \text{Vorüberlegung} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{a-1}{a} < \frac{a}{a+1} \end{aligned}$

b) Bei den nachfolgenden Graphen handelt es sich um Beispiele, welche die in b) gegebene Gleichung erfüllen.









5.14. Entwickeln und Formulieren mathematischer Beweise zu einer gegebenen Behauptung

a) Beispiel 1:
Die gewählte Zahl sei 12. Die Quersumme von 12 ist 3. Dann gilt:

$$12 + 21 = 33$$

und

$$33 : 3 = 11$$

Beispiel 2:
Die gewählte Zahl sei 73. Die Quersumme von 73 ist 10. Dann gilt:

$$73 + 37 = 110$$

und

$$110 : 10 = 11$$

b) Eine beliebige zweistellige Zahl Mit Zehnerziffer x und Einerziffer y hat den Wert

$$10x + y, \quad x \in \{1, \ldots, 9\}, \, y \in \{0, \ldots, 9\}.$$

Vertauschen wir die Ziffern, erhalten wir $10y + x$. Addieren der beiden Zahlen liefert

$$(10x + y) + (10y + x) = 11(x + y).$$

Die Quersumme von der Ausgangszahl ist $x + y$. Teilen wir das vorige Ergebnis durch sie, kommt als finales Resultat immer 11 heraus.

Kontrollstrategien

5.15. Überschlagsrechnungen

a) Es passen mindestens $3 \cdot 8 \cdot 5 = 120$ Kugeln in die Kiste.

b) (i) z. B. $10^{-4} \cdot 4 \cdot 13 = 10^{-4} \cdot 52 = 0{,}0052$

(ii) z. B. $17000 \cdot 5 = 85000$

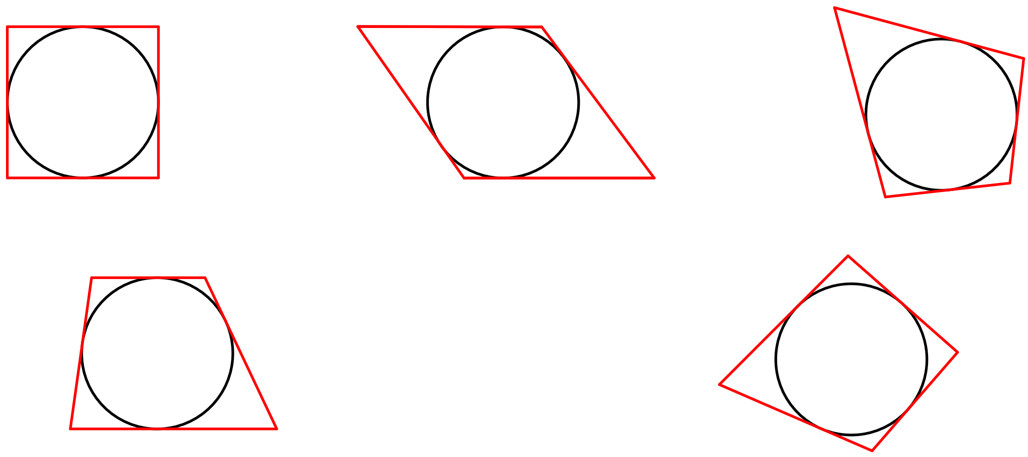
c) z. B. $3 \cdot 7500 = 22500$ und $3{,}5 \cdot 8000 = 28000$, also z. B. das Intervall $[22500; 28000]$

5.16. Größenordnungen abschätzen

$$0 < 4^{-3{,}8} < 2^{-3{,}3} < 2^{-3} < 0{,}5^{2{,}4} < 0{,}25 < 1 < 4 < 0{,}5^{-2{,}4} < 8$$

5.17. Plausibilitätsüberlegungen bei Argumentationen

a) Entstehen können Quadrat, Raute, Drachen, Trapez und allgemeines Viereck.
(**Anmerkung**: Nicht entstehen können zum Beispiel Parallelogramme, die keine Raute sind.)
Skizzen:



b) Liegt ein Rechteck vor, so müssen die Tangenten jeweils einen rechten Winkel bilden. Die Kantenlängen des entstehenden Vierecks sind dann jeweils genau der Kreisdurchmesser. Also sind alle Seiten gleich lang. Somit muss jedes solche Rechteck ein Quadrat sein.

5.18. Fehler systematisch eingrenzen, identifizieren bzw. grob abschätzen

a) Das Maximum einer Funktion ist eine Extremstelle. Die Schülerin hat daher versucht, mithilfe der ersten und zweiten Ableitung mögliche Extremstellen zu identifizieren. Sie vergisst dabei offenbar einerseits, zu überprüfen, ob $f''(5) < 0$ gilt, und andererseits, die Funktion f auch in den Randpunkten des Intervalls $[0; 10]$ auf Extremstellen zu untersuchen.
Der Schüler betrachtet hingegen die linke Intervallgrenze und stellt fest, dass diese ein mögliches Maximum ist. Da der Funktionswert $f(0)$ größer als $f(5)$ ist, liegt an der Stelle 5 kein Maximum vor. Allerdings vergisst auch dieser Schüler, die rechte Intervallgrenze zu überprüfen. Möglicherweise liegt das Maximum der Funktion f dort.

Anmerkung: In obiger Ausführung wird davon ausgegangen, dass die Schülerin sich nicht verrechnet hat und kein weiteres x im Intervall $[0; 10]$ mit $f'(x) = 0$ existiert. Dies wären weitere Fehlerquellen.

b) Der arithmetische Mittelwert ist offenbar zu groß, da dieser größer als der höchste Messwert ist. Mögliche Fehlerquellen sind z. B.

- vertippt im Taschenrechner,
- durch eine falsche Anzahl von Werten dividiert,
- eine Zahl doppelt eingetippt.

Mathematisches Kommunizieren

5.19. Schriftliche mathematische Formulierungen (mit Fachsprache und Fachsymbolik) sprachlich verstehen

Variante A: Das Produkt zweier reeller Zahlen ist genau dann 0, wenn mindestens einer der beiden Faktoren 0 ist.
Variante B: Wenn das Produkt zweier reeller Zahlen 0 ist, so ist mindestens ein Faktor gleich 0. Ist umgekehrt eine der beiden reellen Zahlen gleich 0, so ist das Produkt dieser Zahlen gleich 0.

5.20. Mathematik in präziser mathematischer Notation unter Einsatz der Fachsprache und Fachsymbolik schriftlich darstellen

a) (i) $A = \{3, 6, 9, 12, ..., 30\}$
   (ii) $A \cap B = \{15, 30\}$

b) (i) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \leq f(2)$.
   (ii) $f(0) = -2{,}5$
   (iii) $f(1) = 0$ und $f(5) = 0$
   (iv) $f(7) = g(7)$ und $f'(7) = g'(7)$

c) (i) $d(P, Q) = d(Q, P)$
   (ii) $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$
   (iii) $d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$

   Anmerkung: Alternativ können Sie statt $d(P, Q)$ auch $|\overrightarrow{PQ}|$ schreiben.

5.21. Lernförderliche und präzise Fragen stellen

Präzise lernförderliche Fragen zeichnen sich dadurch aus, dass deutlich wird, was genau nicht verstanden wurde. Wenn möglich, sollten sie auch noch enthalten, wie man über das Problem nachgedacht hat. Dies ermöglicht der Lehrkraft dann, möglichst genaue Hilfen zu geben.

a) Mögliche Fragen sind z. B.
   (i) Was bedeutet der Querstrich über der 9?
   (ii) Warum gilt $0,\overline{9} = 1$, wenn eine Dezimalzahl mit einer 0 vor dem Komma doch immer kleiner als 1 sein muss?
   (iii) Warum gilt $0,\overline{9} = 1$? Egal, wie viele Neunen hinter dem Komma stehen, es ist immer noch ein klein bisschen Platz zur Eins.

b) Mögliche Fragen sind z. B.
   (i) Was bedeutet „lim“?
   (ii) Was bedeutet „$h \to 0$“?
   (iii) Wenn h praktisch 0 ist, dann ist der Bruch nicht definiert, da man durch 0 nicht teilen darf. Wieso kann man das trotzdem so rechnen?
   (iv) Wenn h gegen 0 geht, dann steht da am Ende doch $\frac{0}{0}$ und das ist entweder 1 oder nicht definiert. Wieso kann da etwas anderes herauskommen?

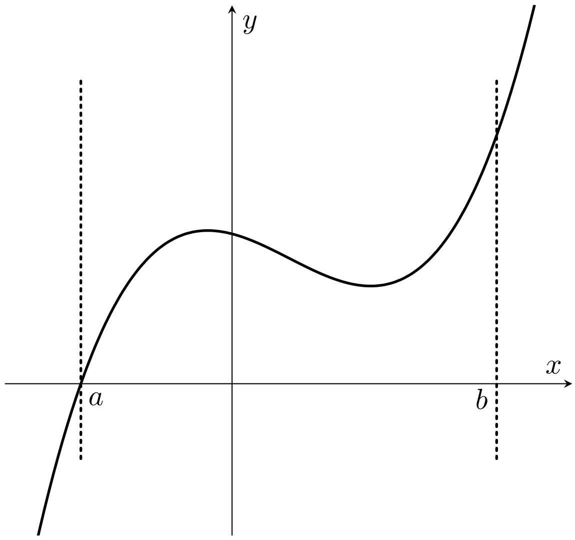
5.22. Mathematische Sachverhalte mündlich erklären

a) Wahrscheinlichkeiten sind theoretische Größen, relative Häufigkeiten ergeben sich dagegen aus den Ergebnissen eines Zufallsexperiments. Führt man sehr viele Wiederholungen durch, so nähert sich die relative Häufigkeit der theoretischen Wahrscheinlichkeit an.

b) (i) Die Ableitung f' in einem Punkt x gibt die Steigung der Tangente an dem Graphen von f im Punkt x an. Hat f an einer Stelle ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, dann ist die Steigung der Tangente an dem Graphen von f an dieser Stelle 0.

(ii) Bei Sattelpunkten gilt ebenfalls $f'(x) = 0$. Es muss daher zusätzlich die hinreichende Bedingung für Extremstellen überprüft werden.

(iii) Die Punkte $(a\,|\,f(a))$ oder $(b\,|\,f(b))$ könnten ebenfalls Extrempunkte sein. Die Randwerte sind also auch mögliche Extremstellen.



(iv) Notwendiges Kriterium:
Sei f eine Funktion und an der Stelle x_0 zweimal differenzierbar. Wenn f bei x_0 einen Wendepunkt hat, dann gilt $f''(x_0) = 0$.
Hinreichendes Kriterium:
Sei f in einer Umgebung von x_0 zweimal differenzierbar. Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat die Funktion f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt.

5.23. Zielgerichtet mit Lehrenden oder Studierenden über Mathematik diskutieren

Diese Lernvoraussetzung ist nicht durch eine Aufgabe zur Einzelbearbeitung abprüfbar, wird aber für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt. Zur Übung empfehlen wir Ihnen, Ihre Lösungen zu anderen Aufgaben dieses Kataloges mit anderen Personen zu besprechen und verschiedene Lösungswege zu diskutieren.

Mathematisches Definieren

5.24. Mathematische Definitionen nachvollziehen (u. a. Beispiele & Gegenbeispiele angeben; prüfen, ob ein Beispiel unter die Definition fällt oder nicht)

a) Die Funktion erfüllt die Bedingungen nicht. Es gilt

$$f(x+y) = 3(x+y) + 4 = 3x + 3y + 4$$

und

$$f(x) + f(y) = 3x + 4 + 3y + 4 = 3x + 3y + 8.$$

Diese beiden Terme sind stets verschieden.

b) Die Funktion erfüllt die Bedingungen. Es gilt

$$f(x+y) = k \cdot (x+y) = kx + ky = f(x) + f(y)$$

und

$$f(a \cdot x) = k \cdot (a \cdot x) = a \cdot (kx) = a \cdot f(x).$$

c) Die Funktion erfüllt die Bedingungen nicht. Es gilt im Allgemeinen

$$f(x+y) = \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y \neq \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y = f(x) + f(y).$$

d) Die Funktion erfüllt die Bedingungen nicht. Es gilt

$$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

und

$$f(x) + f(y) = x^2 + y^2.$$

Diese beiden Terme sind im Allgemeinen nicht gleich.

Anmerkung: Die zweite Bedingung muss nicht mehr überprüft werden, sofern die erste schon nicht erfüllt ist.

5.25. Mathematische Begriffe anhand ihrer Definition erklären

1. Lösung: Die Definition der linearen Abhängigkeit ist wie folgt:
Drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind linear abhängig, wenn $r, s, t \in \mathbb{R}$ existieren mit $r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w} = \vec{0}$.
Die Vektoren sind damit komplanar und liegen in einer Ebene.

2. Lösung: Drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sind linear abhängig, wenn $r, s \in \mathbb{R}$ existieren mit $r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} = \vec{w}$ oder $r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{w} = \vec{v}$ oder $r \cdot \vec{w} + s \cdot \vec{v} = \vec{u}$.
Mindestens einer der Vektoren lässt sich somit als Linearkombination der anderen darstellen.

5.26. Mathematische Definitionen bekannter Begriffe nutzen und angemessen formulieren

a) Eine ganzrationale Funktion 5. Grades ist z. B. $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5$.

b) Der Grad der Funktion ist 4.

c) $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ mit $a_n \neq 0$ ist eine ganzrationale Funktion vom Grad n. (**Anmerkung**: Es gilt $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$.)

d) Ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Dreieck, bei welchem mindestens zwei Seiten gleich lang sind.

e) Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle a wird mit Hilfe des Differentialquotienten definiert als

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

5.27. Eigene Definitionen zu (einfachen) selbst abgeleiteten mathematischen Begriffen entwickeln

Diese Lernvoraussetzung ist nicht in den Fachanforderungen Mathematik (erhöhtes Anforderungsniveau) des Landes Schleswig-Holstein abgebildet und wird daher nicht für ein MINT-Studium in Schleswig-Holstein vorausgesetzt.

Mathematisches Problemlösen

5.28. Gegebene mathematische Probleme verstehen und präzise wiedergeben

Für Verwunderung kann folgender Umstand sorgen: Es gilt sowohl $\lim_{\phi \to 0} \sin(\phi) = 0$ als auch $\lim_{\phi \to 0} \phi = 0$. Der Quotient 0 durch 0 ist aber nicht definiert. Wie kann es sein, dass der Limes $\lim_{\phi \to 0} \frac{\sin(\phi)}{\phi}$ dennoch definiert ist? Und wieso kommt 1 als Ergebnis heraus und nicht 0 oder unendlich?
Hintergrundinformation (nicht Teil der erwarteten Lösung):
Der naive Ansatz

$$\lim_{\phi \to 0} \frac{\sin(\phi)}{\phi} \stackrel{!}{=} \frac{\lim_{\phi \to 0} \sin(\phi)}{\lim_{\phi \to 0} \phi}$$

ist mathematisch nicht korrekt. Damit besteht das vermeintliche Problem des „durch Null Teilens“ gar nicht.

5.29. Gegebene Lösungen zu mathematischen Problemen verstehen

a) Die Lösung des Problems lautet: $n(2^{2n}-1)$ ist für alle geraden, aber keine anderen natürlichen Zahlen n durch 6 teilbar.

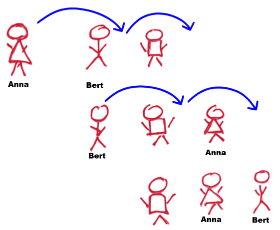
b) Wichtige mathematische Mittel bzw. Argumente sind z. B. folgende:
- Fallunterscheidung gerade/ungerade
- Eine Zahl ist genau dann durch 6 teilbar, wenn sie sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist.
- Verwendung der dritten binomischen Formel
- Unter drei aufeinanderfolgenden Zahlen gibt es eine durch 3 teilbare.
- Potenzen von 2 sind nicht durch 3 teilbar.

5.30. Allgemeine heuristische Prinzipien sicher und flüssig verwenden (Skizze anfertigen, systematisch probieren, in Teilprobleme zerlegen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden)

Das Problem kann mit Hilfe verschiedener heuristischer Prinzipien gelöst werden. Ein beispielhafter Lösungsprozess, der besonders viele dieser Prinzipien abbildet, findet sich in Aufgabe 5.31.

5.31. Aus gegebenen Lösungen zu mathematischen Problemen Lösungsstrategien erarbeiten

Aufgabe:
Eine ungerade Anzahl von Kindern spielt Bockspringen. Es springt immer das hinterste Kind über die anderen, bis es ganz vorne steht. Wie viele Sprünge sind notwendig, bis das Kind, das zuerst in der Mitte stand, ganz vorne steht? Erläutern Sie, wie Sie vorgegangen sind.

Lösungsweg:	**Lösungsstrategie:**
Ich habe mir zuerst überlegt, wie die **Situation bei drei Kindern** aussieht.	Beispiele betrachten, Vereinfachen
Dazu habe ich mir eine **Skizze gemacht**. 	Skizze anfertigen
Die Frage ist, wann Bert vorne steht. Anna springt zweimal. Dann springt Bert zweimal. Dann steht er vorne. Hier sind es also 4 Sprünge.	
Ich habe vermutet, es gilt immer $2 \cdot ($**Anzahl Kinder**$-1)$.	Vermutung formulieren
Dann habe ich mir die Situation mit 5 Kindern vorgestellt. Ich bin dabei auf 12 Sprünge gekommen. Das ist aber nicht $2 \cdot (5-1)$, also war meine Vermutung falsch.	Vermutung prüfen, Beispiele betrachten
Bei 7 Kindern habe ich mir überlegt, dass man immer über die anderen 6 vor sich springen muss, wenn man dran ist.	
Ich wusste also, **ich muss mir nur noch überlegen**, wie viele Kinder sich bewegen müssen. Das sind bei 7 Kindern genau 4 Kinder.	Zerlegung in Teilprobleme
Da wurde mir klar, dass es genau (Anzahl Kinder hinter dem Mittelkind$+1$) **Kinder sind**, die springen müssen.	Vermutung formulieren
Über die Anzahl der Kinder hinter dem Mittelkind musste ich noch kurz nachdenken, **aber das ist wie beim gerechten Teilen von Gummibärchen auf zwei Kinder**, dann muss man eines wegnehmen, dann geht es. Also (Anzahl der Kinder-1) : 2.	Analogien suchen
Das habe ich dann noch **allgemein aufgeschrieben**. Statt Anzahl der Kinder habe ich A geschrieben. Meine Lösung lautet also: $(((A-1):2)+1)\cdot(A-1)$.	Erkenntnisse systematisieren

Weiterführende Literatur zum Problemlösen:
`http://www.sinus-transfer.de/fileadmin/MaterialienIPN/Bruder.pdf`

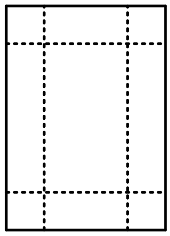
Quelle Abbildung: Die Abbildung wurde von Anke Lindmeier und Helmut Mallas erstellt und zum Abdruck freigegeben.

5.32. Rolle allgemeiner Problemlösestrategien bei ihrer Verwendung explizit erläutern

Die Aufgabe kann auf verschiedenen Wegen gelöst werden. Denkbar wären beispielsweise:

- basteln und ausmessen
  heuristisches Prinzip: unsystematisches Probieren
  Rolle: Verstehen der Aufgabenstellung, Gewinnen von Zahlenwerten, vorläufiges Verständnis der Abhängigkeiten

- das Anfertigen einer Skizze,
  heuristisches Prinzip: Skizze, ggf. Einzeichnen von Längenmaßen
  Rolle: Verstehen der Aufgabenstellung, Gewinnen von Zahlenwerten, Identifikation relevanter Variablen und ggf. deren Abhängigkeiten voneinander



- das Anfertigen einer Tabelle, in welcher die Volumenformel mit unterschiedlichen Höhen ausprobiert wird.
  heuristisches Prinzip: systematisches Probieren
  Rolle: Annäherung an das Extremum durch Intervallschachtelung

  Sei x die Distanz in cm von der Kante des Papiers bis zur Knickkante, also die Höhe des offenen Quaders. Dann gilt:

x	Volumen
0 cm	0 cm^3
1,5 cm	720,9 cm^3
3 cm	1066,5 cm^3
4,5 cm	1117,8 cm^3
6 cm	955,8 cm^3
7,5 cm	661,5 cm^3
9 cm	315,9 cm^3

5.33. Notwendigkeit von Fallunterscheidungen erkennen und Fallunterscheidungen vornehmen

a) Es ist eine Fallunterscheidung (2 Fälle) naheliegend: $2x - 3 \geq 0$ oder $2x - 3 < 0$.
Die Lösungen der Gleichung sind $x_1 = -2{,}5$ und $x_2 = 5{,}5$.

Möglich ist hier auch eine Lösung ohne Fallunterscheidung, nämlich:

$$\begin{aligned} |2x-3| = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad (2x-3)^2 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 12x + 9 = 64 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -2{,}5 \text{ oder } x = 5{,}5 \end{aligned}$$

b) Es ist eine Fallunterscheidung (2 Fälle) notwendig: $3x - 6 < 0$ oder $3x - 6 \geq 0$.
Lösungen der Ungleichung liefern alle x mit $1 \leq x \leq 4$.

c) Es ist eine Fallunterscheidung (3 Fälle) notwendig: $x = 1$ (für $x = 1$ ist der linke Term nicht definiert) oder $x - 1 < 0$ oder $x - 1 > 0$.
Lösungen der Ungleichung liefern alle x mit $x \geq 3$ oder $x < 1$.

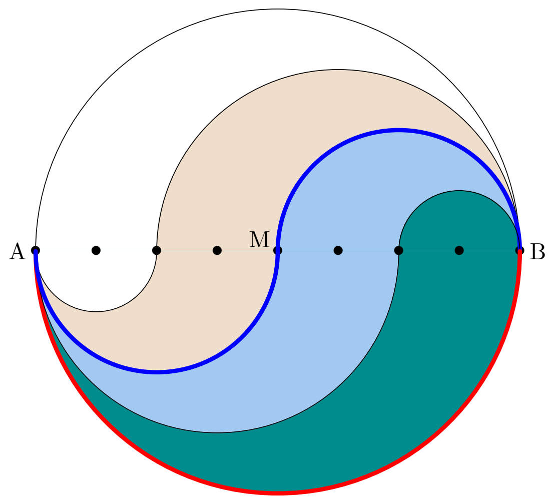
d) Es ist keine Fallunterscheidung notwendig, die Ungleichung lässt sich zu $x > -2$ umformen.

5.34. Probleme mit mindestens drei Lösungsschritten lösen

Siehe 5.35

5.35. Komplexe Probleme in einfache äquivalente Teilprobleme zerlegen

Zunächst die Analyse: Die Figur ist punktsymmetrisch zu M, daher sind nur zwei Umfänge zu prüfen. Der Umfang der blauen und des türkisen Fläche sind zum Teil identisch. Es ist daher nur zu prüfen, ob die zwei Halbkreise vom Radius $\frac{r}{2}$ (blau eingezeichnet) den gleichen Umfang wie der Halbkreis mit dem Radius r (rot eingezeichnet) haben.



Es gilt:

$$U_{groß} = 2 \cdot \pi \cdot r = 4 \cdot \pi \cdot \frac{r}{2} = 2 \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{2}\right) = 2 \cdot U_{klein}$$

Mathematisches Modellieren

5.36. Beschreibung außermathematischer Situationen mithilfe mathematischer Werkzeuge

Dass die Geschwindigkeit gleichmäßig abnimmt, deutet darauf hin, dass die gesuchte Funktion eine Gerade beschreibt. Um eine Gerade eindeutig in ein Koordinatensystem zeichnen zu können, benötigen wir zwei Punkte, die auf der besagten Geraden liegen. Zum einen ist dies der Punkt A $(0|\,20)$, da wir wissen, dass die Geschwindigkeit des Autos zu Beginn der Beobachtung $20\,\mathrm{ms}^{-1}$ beträgt. Zum anderen ist es der Punkt B $(10|\,0)$, da wir wissen, dass das Auto nach $10\,\mathrm{s}$ die Geschwindigkeit $0\,\mathrm{ms}^{-1}$ besitzt.
Sei nun die gesuchte Gerade gegeben durch $f(x) = mx + b$ mit $m, b \in \mathbb{R}$. Dann können wir m und b mit Hilfe der Punkte A und B bestimmen. Es gilt nämlich

$$m = \frac{0-20}{10-0} = -2$$

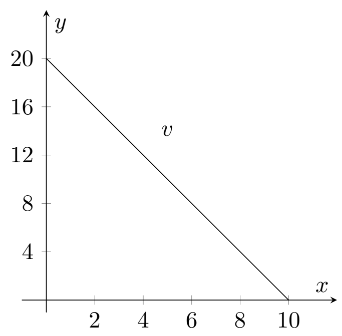
und damit auch

$$20 = -2 \cdot 0 + b \Rightarrow b = 20.$$

Also beschreibt $f(x) = -2x + 20$ (oder der zugehörige Graph, siehe Aufgabenlösung 5.37) die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit.

5.37. Lösung außermathematischer Problemsituationen mithilfe mathematischer Werkzeuge

a)



Die Funktionsgleichung der Geraden v lautet: $v(x) = -2x + 20$.
Die zurückgelegte Strecke ergibt sich aus der Fläche unter dem Graphen. Es gilt

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{10} v(x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{10} (-2x+20)\ \mathrm{d}x = \Big[-x^2 + 20x\Big]_0^{10} \\ &= -10^2 + 200 = 100. \end{aligned}$$

Alternativ lässt sich die Fläche unter dem Graphen auch über die Flächeninhaltsformel für Dreiecke berechnen:

$$s = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 20 = 100$$

Somit legt das Auto in den $10\,\mathrm{s}$ bis zum Stillstand $100\,\mathrm{m}$ zurück.

b) Es wird die Integration (genauer: der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) als mathematisches Verfahren genutzt.

5.38. Kontrolle von Ergebnissen einer mathematischen Modellierung im Hinblick auf Stimmigkeit in Realsituationen

Kim hat mit einem linearen Modell gerechnet. Das Ergebnis basiert auf einer nicht situationsgerechten Modellierung. Kim hat angenommen, dass sich die Messwerte ab 6 linear entwickeln und hat mit Hilfe des Wertes um 14 Uhr (+8°C in 8h) einen Wert für 22 Uhr (+8°C in 8h) bestimmt. Die Temperatur von 28°C für 22 Uhr nachts ist – vor allem gemessen an den morgendlichen Temperaturen von 12°C – nicht stimmig. Da die Lufttemperatur nicht gleichmäßig über den Tag bis in die Nacht immer weiter steigen wird, ist die gewählte lineare Modellierung der Sachsituation nicht passend.

Anmerkung: Auch richtig ist eine kürzere Antwort der Form: „Kim berücksichtigt nicht, dass es abends wieder kühler ist, seine Modellierung ist also nicht situationsgerecht.“

5.39. Bewerten verschiedener mathematischer Modelle derselben Realsituation

Die Sinusfunktion eignet sich deutlich besser als eine lineare Funktion zur Modellierung dieser Realsituation, da mit ihr das Steigen der Temperatur am Morgen, ein Höhepunkt gegen Mittag und das Abfallen gegen Abend besser dargestellt werden können. Außerdem könnte man mithilfe der Sinusfunktion aufgrund ihrer Periodizität auch den Verlauf der Lufttemperatur über mehrere Tage besser darstellen als mit einer linearen Funktion.

Anmerkung: Für die genaue Bestimmung einer passenden Sinusfunktion sind zusätzliche Annahmen, beispielsweise zum Temperaturmaximum, zu treffen.

5.40. Erkennen des genuin mathematischen Beitrags beim Lösen außermathematischer Probleme mithilfe mathematischer Werkzeuge

Mithilfe des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ kann man ermitteln, auf wie viele Arten k Elemente aus einer n-elementigen Menge ausgewählt werden können. Die Auswahl erfolgt dabei **ohne Zurücklegen** und **ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**:
Mögliche Fragestellungen:

- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für „sechs Richtige“ bei der Lotterie 6 aus 49 an.

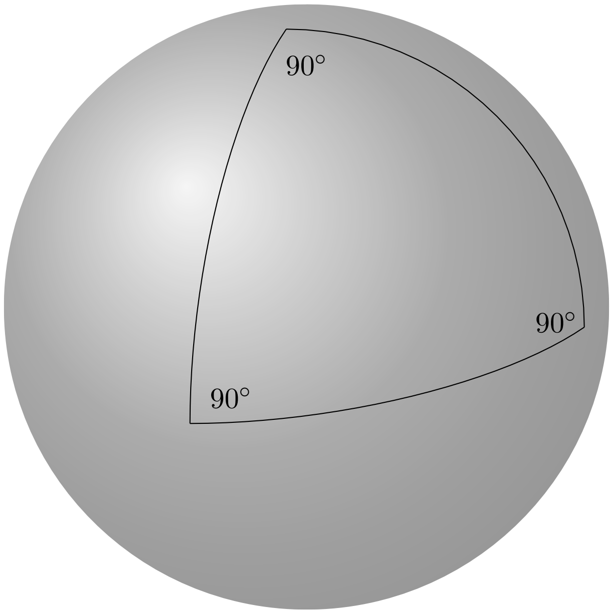
  Lösung: $\frac{1}{\binom{49}{6}}$

- Wie viele unterschiedliche Stichproben mit einem Umfang von 20 Stück kann man aus einer Warenlieferung von 100 Stück entnehmen?

  Lösung: $\binom{100}{20}$

5.41. Reflektieren des Nutzens und der Grenzen mathematischer Modellierungen für reale Problemsituationen

Bei längeren Flugstrecken spielt die Krümmung der Erde eine immer größere Rolle.
Der Satz über die Innenwinkelsumme eines Dreiecks ABC setzt voraus, dass dieses Dreieck inklusive seiner Seiten in einer Ebene liegt.
Wie das folgende Beispiel illustriert, kann man Dreiecke auf Kugeln betrachten, deren Innenwinkelsumme ungleich 180° ist. Im Beispiel hat das Dreieck eine Innenwinkelsumme von 270°.



Anmerkung: Dreiecke auf Kugeln sind nicht im Schulunterricht enthalten. Es ist hier ein Transfer zu leisten. Um sich mit dem zugrunde liegenden Problem vertrauter zu machen, empfehlen wir Ihnen eine Recherche zur *sphärischen Geometrie*.

Recherche

5.42. Mathematische Informationen in Nachschlagewerken, dem Internet oder anderen Ressourcen recherchieren (inkl. kritischer Einschätzung der Quellen)

In der Definition der Potenz wurde $a^0 = 1$ für alle a gesetzt, also ist insbesondere

$$0^0 = 1.$$

Da 0^x für alle positiven x den Wert 0 hat, wäre auch der Wert 0 denkbar. Wie die Festlegung, dass 1 keine Primzahl ist, ist die Festlegung des Wertes von 0^0 ebenfalls keine Frage von wahr oder falsch, sondern von zweckmäßig oder unzweckmäßig.

Quelle: https://mathepedia.de/Null_hoch_Null.html

Teilnehmende der Arbeitstagungen „Mathematische Lernvoraussetzungen im MINT-Studium“ am 23./24.11.2018 bzw. 01./02.11.2019 in Bad Segeberg

Maike Abshagen, Institut für Qualitätsentwicklung an Schulen Schleswig-Holstein (IQSH)
Karsten Alpers, Theodor-Heuss-Schule Pinneberg
Gabriele Berndt, Kieler Gelehrtenschule
Nils Bücker, Hermann-Tast-Schule Husum, Fachkommission Mathematik im MBWK
Oliver Eichhorn, Landesseminar Berufliche Bildung SHIBB
Timm Erhardt, Ernst-Barlach-Gymnasium Kiel, Fachkommission Mathematik im MBWK
Jan Geberbauer, Gymnasium am Mühlenberg, Bad Schwartau
Stephanie Gerecht, Gymnasium am Mühlenberg, Bad Schwartau
Marcel Gol, Humboldt-Schule Kiel
Markus Haase, Universität Kiel, Mathematisches Seminar
Aiso Heinze, IPN Kiel, Abteilung Didaktik der Mathematik
Sandra Herzog, FH Kiel, Fachbereich Informatik und Elektrotechnik
Christoph Holtiegel, Hebbelschule Kiel, Fachkommission Mathematik im MBWK
Caren Ihlemann, Lise-Meitner-Gymnasium Norderstedt & IQSH
Tobias Illenseer, Universität Kiel, Sektion Physik
Ralf Janssen, Jungmannschule Eckernförde, Fachkommission Mathematik im MBWK
Jürgen Keitel, Toni-Jensen-Gemeinschaftsschule Kiel
Karsten Keller, Universität Lübeck, Institut für Mathematik
Valentina Kluge, Hochschule Flensburg, Maschinenbau, Verfahrenstechnik und Maritime Technologien
Julia Kohn, Heinrich-Heine-Schule Heikendorf & IQSH
Roland Kral, TH Lübeck, Fachbereich Maschinenbau und Wirtschaft
Michael Krätzschmar, Hochschule Flensburg, Fachbereich Information und Kommunikation
Ines Kreutzfeldt, Emil-Possehl-Schule Lübeck, Fachkommission Mathematik berufliche Schulen im SHIBB
Anja Kromm, Städtisches Gymnasium Bad Segeberg, Fachkommission Mathematik im MBWK
Barbara Langfeld, Universität Kiel, Mathematisches Seminar
Uwe Leck, Universität Flensburg, Abteilung Mathematik und ihre Didaktik
Anke Lindmeier, IPN Kiel, Abteilung Didaktik der Mathematik
Kristin Litteck, Studentin Mathematik und Anglistik, Universität Kiel
Hinrich Lorenzen, Universität Flensburg, Abteilung Mathematik und ihre Didaktik
Helmut Mallas, IQSH
Andreas Nessel, FH Kiel, Fachbereich Maschinenwesen
Claus Neumann, FH Kiel, Fachbereich Informatik und Elektrotechnik
Irene Neumann, IPN Kiel, Abteilung Didaktik der Mathematik
Kai Niemann, Fachaufsicht Mathematik, MBWK
Markus Nieß, Universität Kiel, Mathematisches Seminar
Stephan Nocon, Ernst-Barlach-Gymnasium Kiel, Fachkommission Mathematik im MBWK
Gudrun Paolella, Gymnasium Kronshagen, Fachkommission Mathematik im MBWK

Anja Pohl, Gymnasium Harksheide Norderstedt
Jürgen Prestin, Universität Lübeck, Institut für Mathematik
Annett Rave, Heinrich-Heine-Schule Heikendorf
Lüder Reimers, Friedrich-Paulsen-Schule Niebüll
Frank Reitmaier, Carl-Maria-von-Weber-Schule Eutin
Markus Riotte, TH Lübeck, Fachbereich Angewandte Naturwissenschaften
Dunja Rohenroth, IPN Kiel, Abteilung Didaktik der Mathematik
Tobias Rolfes, IPN Kiel, Abteilung Didaktik der Mathematik
Andreas Schäfer, TH Lübeck, Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Martin Scharschmidt, Landesseminar Berufliche Bildung SHIBB
Jutta Schmachtenberg, Gymnasium Kronwerk & IQSH
Maria Schmidt, IQSH
Mathias Schmitt, Cesar-Klein-Schule Ratekau
Jörn Schnieder, Universität Lübeck, Institut für Mathematik
Dagmar Schröder, FH Westküste, Fachbereich Technik
Heiko Schröder, Lise-Meitner-Gymnasium Norderstedt
Mareike Schumacher, Studentin Mathematik und Geographie, Universität Kiel
Ulrike Stade, Schule am Burgfeld Bad Segeberg & IQSH
Selma Stronzik, Gymnasium Kronwerk Rendsburg
Oliver Thomsen, Städtisches Gymnasium Bad Segeberg & IQSH
Anja Vest, Hochschule Flensburg, Fachbereich Energie und Biotechnologie
Birke-Johanna Weber, IPN Kiel & Universität Kiel, Mathematisches Seminar
Richard Weidmann, Universität Kiel, Mathematisches Seminar
Tatjana Werner, Bismarckschule Elmshorn
Nils Wieckhorst, Dietrich Bonhoeffer Gemeinschaftsschule Bargteheide
Sebastian Wolf, Universität Kiel, Sektion Physik

Mathematikkenntnisse sind eine wichtige Voraussetzung für den Studienerfolg in technischen Fächern wie den Studiengängen der Energie oder Life Sciences an der Hochschule Flensburg. Der Aufgabenkatalog gibt für den Übergang in das Studium eine Orientierung zum Grundlagenfach Mathematik und trägt damit direkt zu einem besseren Studium bei.

Prof. Dr. Anja Vest, Professorin am Fachbereich Energie und Biotechnologie an der Hochschule Flensburg

Der Aufgabenkatalog bietet für uns Hochschullehrende die Gelegenheit, einen Abgleich mit den mathematischen Voraussetzungen der Studienanfänger*innen und den eigenen Vorstellungen der Voraussetzungen zu machen. Wir werden Teile des Katalogs bereits ab diesem Wintersemester im Fachbereich Informatik und Elektrotechnik an der Fachhochschule Kiel in digitalisierter Form einsetzen.

Prof. Dr. Claus Neumann, Professor für Mathematik und Physik an der Fachhochschule Kiel

Von „Mathematik in Medizin und Lebenswissenschaften" bis hin zur „Medizinischen Ernährungswissenschaft" benötigen alle unsere Lübecker MINT-Studiengänge fundierte mathematische Schulkenntnisse. In unserem Montag beginnenden, zweiwöchigen Vorkurs wiederholen wir diese Fertigkeiten und nutzen dabei den neu erstellten Aufgabenkatalog.

Prof. Dr. Jürgen Prestin, Direktor des Instituts für Mathematik an der Universität zu Lübeck

Der Aufgabenkatalog bietet uns Lehrkräften die Möglichkeit, mit Schülerinnen und Schülern auf erhöhtem Anforderungsniveau gezielt die mathematischen Voraussetzungen für ein MINT-Studium zu erarbeiten. Gleichzeitig können wir den interessierten SuS aus dem grundlegenden Niveau zeigen, dass auch sie viele Voraussetzungen für ein MINT-Studium mitbringen. Ich werde in diesem Schuljahr immer wieder Aufgaben aus dem Katalog nutzen, um Grundlagen zu wiederholen und SuS für ein Studium zu motivieren.

Jutta Schmachtenberg, Studienleiterin für Mathematik am IQSH

IPN
Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik

Leibniz Gemeinschaft