Betrachte die folgende mathematische Aussage (Gauß'sche Summenformel).

Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Aufgabenstellung

1. **Bestimme** die Voraussetzung und Behauptung der Aussage.

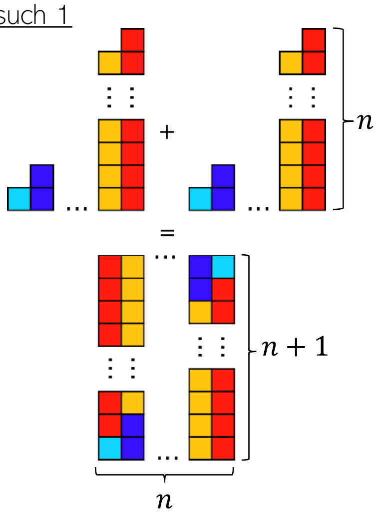
Wenn ____ (Voraussetzung),

dann ____ (Behauptung).

2. **Gib** die drei untenstehenden Beweisversuche in eigenen Worten **wieder**.

3. Stellen alle drei Beweisversuche korrekte Beweise dar? **Begründe** deine Einschätzung.

Beweisversuch 1



Die beiden obigen Figuren stellen jeweils die Summe

$$1 + 2 + \cdots + n$$

dar.

Das untere Rechteck entsteht, wenn ich die rechte Figur drehe und auf die linke setze. Dann hat das untere Rechteck die Kantenlänge n beziehungsweise $(n+1)$.

Das Doppelte von $1 + 2 + \cdots + n$ ergibt also $n \cdot (n+1)$.

Damit ist die Aussage beweisen.

Beweisversuch 2

Wir überprüfen die Aussage für eine beliebige Zahl z.B. für 4 und eine Primzahl, etwa 11.

Für 4 gilt

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \frac{4 \cdot 5}{2}.$$

Auch für 11 gilt

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 66 = \frac{11 \cdot 12}{2}.$$

Damit ist die Aussage für alle n bewiesen.

Beweisversuch 3

Wir können die Summe wie folgt umschreiben:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$= (1 + n) + (2 + n - 1) + (3 + n - 2) + \cdots.$$

$$= (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots.$$

Dann haben wir die Anzahl der Summanden von n Summanden halbiert und erhalten schließlich

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

Damit ist die Aussage beweisen.